

PACS: 62.20.F, 62.20.-x

**STRENGTH AND PLASTICITY OF SPD COPPER
AT LOW TEMPERATURES****N.V. Isaev¹, T.V. Grigorova¹, S.E. Shumilin¹, O.A. Davydenko², S.S. Polishchuk³**

1 – B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

2 – Donetsk Institute for Physics and Engineering named after O.O. Galkin of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

3 – G. V. Kurdyumov Institute of Metal Physics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Summary. Main microstructural features of ultrafine-grained polycrystalline oxygen-free copper obtained by direct and equal-channel angular hydrostatic extrusion were studied by EBSD and XRD methods. The effect of microstructure on the temperature dependences of the yield stress was investigated using tensile tests in the insufficiently studied temperature range of 4.2–300 K.

Keywords: Ultrafine grained materials, copper, yield strength, low temperature, dislocations, thermally activated deformation.

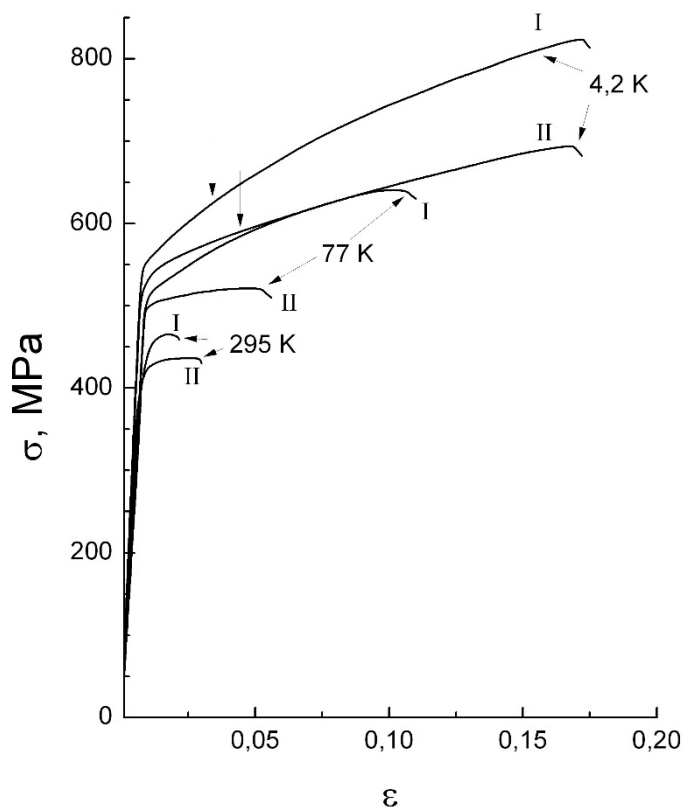
One of the ways to increase a material's strength is to refine its microstructure down to a sub-micron scale by severe plastic deformation (SPD) methods. All these materials exhibit strengths which is superior to that of common polycrystals at room and elevated temperatures. However, the mechanisms of plastic deformation of materials characterized by a high density of grain boundaries are not fully understood as yet and are the subject of ongoing research. A logical goal is to extend the range of ultra-fine grained materials to be studied and also to broaden the temperature range of experiments. The aim of our work is to compare the microstructure and low temperature strength and ductility of polycrystalline oxygen free copper (Cu-OF) processed by direct hydroextrusion (DE) and equal channel angular hydroextrusion (ECAE).

Polycrystalline copper after DE (samples I) and after ECAE (samples II) were deformed in a deformation machine with a liquid-helium cryostat in the temperature range 4.2–300 K in the quasi-static tensile mode at a constant piston speed, corresponding to the initial strain rate 10^{-4} s^{-1} .

The analysis of the samples texture by the method of inverse pole figures shown that as a result of DE, the {111} planes of the grains are oriented predominantly perpendicular to the extrusion direction, while after four ECAE passages the distribution of the pole density in inverse pole figures in the extrusion direction is more uniform with slight predominance of the {012}, {013}, and {025} planes. Also, EBSD-analysis shown that samples II have a smaller grain size (about 0,5 μm), a higher proportion of high angle boundaries, increased dislocation density and the absence of sharp texture as compared to samples I.

With decreasing temperature: (1) the yield stress of all the samples increases (pic. 1), and for a fixed temperature, the strength of samples I is higher than that of samples II; (2) the ductility of all the samples increases, and the ductility of samples I at 77 K is much higher than that of samples II. At a temperature of 4.2 K, there are periodic stress jumps on the tension curves, i.e., plastic flow of ECAE and DE polycrystals becomes macroscopically unstable above a certain critical strain. The

amplitude and frequency of the stress jumps increase with the strain but appear to depend weakly on the extrusion geometry.



Pic.1. Stress–strain curves for UFG polycrystalline Cu-OF plotted in true coordinates at three different temperatures: samples after DE (I) and four ECAE runs (II). The vertical arrows indicate the onset of jump–like deformation

It was found that an increase in the strength of polycrystals resulting from the extrusion is determined not only by an increase in the density of dislocations and grain boundaries, but also by the orientational texture, which depends significantly on the extrusion geometry.

From thermal activation analysis of temperature dependences of the yield strength, it was found that in the temperature range of 77–200 K the plastic deformation is determined by a thermally activated mechanism of crossing the forest dislocations, and empirical estimates of the parameters of this mechanism were obtained. Deviations (anomalies) of the temperature dependences of plasticity parameters from those expected for a simple crossing mechanism were observed at temperatures below 77 K and above 200 K.

References:

1. В.А. Белошенко, В. Н. Варюхин, В. З. Спусканюк, *Теория и практика гидроэкструзии*, Наукова думка, Киев (2007).
2. D. Balzar, in *Defect and Microstructure Analysis from Diffraction*, edited by R.L. Snyder, H.J. Bunge, and J. Fiala, International Union of Crystallography Monographs on Crystallography No. 10 (Oxford University Press, New York, 1999) pp. 94-126.
3. В.И.Доценко, А.И.Ландау, В.В.Пустовалов. *Современные проблемы низкотемпературной пластичности материалов*, Киев, Наукова думка, (1987).
4. Y. Estrin, N.V. Isaev, S.V. Lubenets, S.V. Malykhin, A.T. Pugachov, V.V. Pustovalov et al, *Acta Materialia* 54, 5581 (2006).
5. Н.В. Исаев, Т.В. Григорова, О.В. Мендюк, А.А. Давиденко, С.С. Полищук, В.Г. Гейдаров, *ФНТ* 42, 1053 (2016).

UDC 620.179.18

STOCHASTIC REGULARITIES IN THE NON-CONTACT DETERMINATION OF LOCAL STRAINS IN THE SURFACE LAYER OF STEEL 45 UNDER HIGH-CYCLE LOADING

Pisarenko¹ G.G., Voinalovych² O.V., Maylo¹ A.M.

¹G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength, NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

² National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Summary. *The structural material heterogeneity causes the scatter in the mechanical properties. The local stresses in the crystallite can exceed by several times the actual stress values. The order of magnitude of the microplastic strains is 10^{-6} mm/mm, which is below the fatigue limit at normal stresses. Due to the structural and technological factors, the surface elasto-plastic layer of the structural material is less resistant to mechanical damage than the bulk of the material, resulting in a certain number of fatigue failure cases in the total number of failures of metal structures. Non-uniformities in the micro-stress state lead to an irregular development of micro-plastic strains, whose localization affects the evolution of a dissipative structure in a polycrystalline material, which is particularly critical for the subsurface layer. The analysis of the damage state evolution for structure-sensitive parameters of the substructure surface makes it possible to control the mechanical properties of the structural material under high-cycle deformation.*

Keywords: *fatigue, inelasticity, microplastic strains, deformation relief, speckle pattern.*

The process of fatigue in structural materials is characterized as exhibiting certain stages, which is caused by the hierarchy of the deformation processes at different scale levels and by their self-organization [1]. The structural transformations are gradually developed, beginning from those at the micro-, meso-, and macro-structural levels, which is due to the self-organization of a dissipative structure, with the most intense development of the deformation processes in the surface layer. In this connection, the methods of quantitative assessment of the structural changes occurring at the surface have a significant place in determining the damage kinetics during fatigue.

Identifying the stages of damage during the high-cycle fatigue is important for monitoring the damage state of a structural material [2]. This is due to that the non-localized damage stage is 90% of the life being larger as compared to the stage of fatigue crack development. Under such conditions, the deformation-induced structural defects are developed in the surface layer to form a stable surface deformation relief. The use of discrete characteristics of optical images of the structural elements at the level of meso- and micro-structural transformations that enable the control of the strain heterogeneity on the surface of a material with high resolution [3-5] can be considered as an efficient modern method for monitoring the damage in terms of the deformation relief irregularity. The relief formation is related to the development of the localized slip plane shears in polycrystalline structure elements. Due to this, a deformation-induced multiple damage is accumulated in an elasto-plastic material. A set of the developed surface shear planes produces a relief whose density is of an irreversible nature. The surface relief has a structure specific to each loading stage. A change in the structure of deformation-induced defects in the surface layer is reflected in the kinetic characteristics of fractal dimension images of the deformed surface.

A non-contact digital image correlation (DIC) method was used to numerically evaluate the microstrain amplitude [6]. The transformation of the Gaussian beam energy transferred from a coherent source of radiation into the reflected speckle-modulated beam energy with a certain ratio of the energies of absorption and reflection by the plastically deformed polycrystalline surface is a manifestation of the combined effect of a dissipative interaction of the metal polycrystal with the deformation energy of the force inducer, which occurs during the strain-induced transformation in the surface layer of the elastic-plastic body. The light beam energy transformation occurs due to the diffusion-mirror reflection of a coherent beam on the scattering centers located in the radiation

zone. The scattering regions are the deformation relief elements on the polycrystalline surface of the irradiated object.

The material surface with the deformation relief is irradiated by a coherent beam source with the wavelength commensurate with the expected value of microplastic strains on the metal specimen surface that occur under conditions of loading. In our case, the wavelength of the coherent radiation was 450 nm.

Figure 1 shows a 2D-speckle-structure of the non-deformed specimen surface and the correlation curve of discrete strains in steel 45 based on the measurement scale $L=40\ \mu\text{m}$

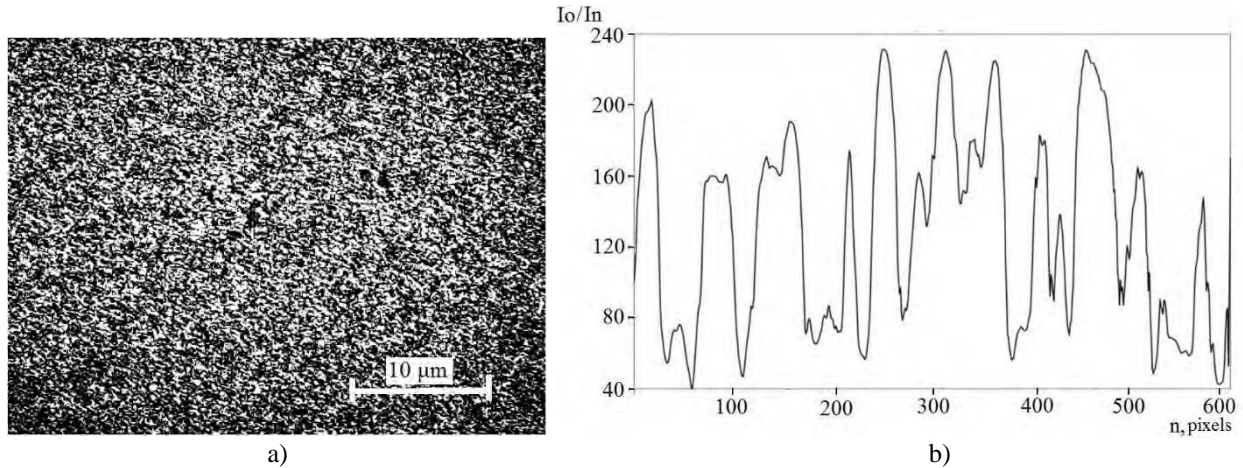


Fig. 1 - a - speckle-pattern image of the undeformed surface; b – correlation curve for discrete strains on the surface

It has been found [7] that with decreasing the gage length for measuring microstrains on the polycrystalline material surface, the resolution required to determine the heterogeneity parameter increases. The dimension of the surface radiation area is $(30 \times 40)\ \mu\text{m}$, which corresponds to the scale of microstrain localization on the surface. The resolution of the deformation relief image was 225 pixels per $1\ \mu\text{m}^2$ of the specimen area.

As the deformation relief is formed, the image brightness level changes monotonically, with the grayscale values ranging from 0 to 255. The binary specklegram mode that enhances the weight of each pixel was used to increase the sensitivity. A decrease in the reflective power of the material surface is represented by the increasing number of dark pixels on the brightness scale pattern. With the growing density of the deformation relief, the reflected beam energy decreases and the diffusely scattered energy increases. As shown in the speckle-pattern image of the surface-reflected beam, the number of pixels increases with the developing deformation relief, which complies with the state of damage depicted in Fig. 2 for the deformation relief of the steel under investigation. The speckle fields were recorded for different stress amplitude values in four cross-sections of the specimen. The specimen, supported as a cantilever, was loaded in cyclic bending with a non-uniform stress distribution along the specimen length. The maximum stresses were in the transition area from the test section to the fillet, whereas at the free edge, the stresses were equal to zero.

The quantity D that is equal to 1 in the maximum damage state was taken as a measure of the deformation relief intensity and defined as a ratio of the number of white pixels to the total number of pixels in the speckle-pattern image. The parameter D characterizes the deformation relief intensity on the material surface.

$$D = \sum n_0 / \sum n,$$

where n is the total number of pixels, n_0 is the number of white pixels.

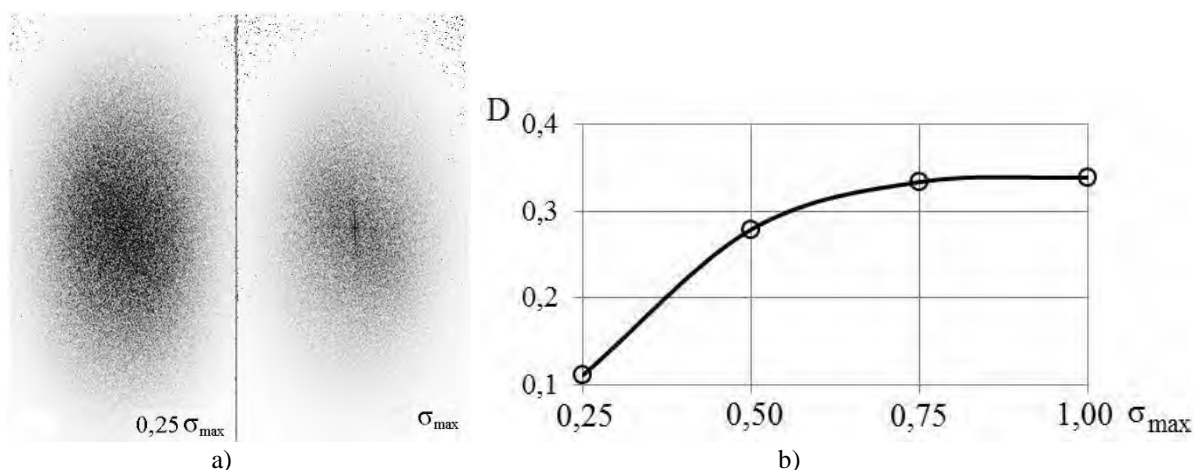


Fig. 2 - Characterization of the deformation relief on the surface of the steel 45 specimen: a – the Fourier spectra of the surface after 10^5 loading cycles at the stress σ_{\max} and $0.25\sigma_{\max}$; b – the kinetic behavior of the histogram for the speckle-pattern image of the deformation relief

The characteristic of fluctuation in the intensity of the histogram for the speckle field fits the growth kinetics of the deformation relief. As the stresses in the specimen cross-sections increase, this characteristic increase, which is in compliance with the intensity of the deformation relief amplitude formation on the surface.

Conclusions.

The correlation characteristic of the deformation relief of steel 45 specimens has been obtained using a coherent radiation with the wavelength $\lambda = 450$ nm, which is in compliance with the regularities in the deformation kinetics of the elasto-plastic material under high-cycle fatigue.

It has been found that the employed hardware and software combined system that implements the possibilities of the DIC method to analyze the surface of an elasto-plastic material ensures the resolution in imaging the orthogonal surface strains in the range of $0.5 \mu\text{m} \pm 10\%$, which can be used for monitoring the non-localized damage in structural materials under loading conditions below the fatigue limit.

References:

1. Bydzan A. *Fatigue failure as process of sequential development of plastic deformation and continuity disturbance in hierarchy of structural levels* / A. Bydzan, S. Panin // Proceedings KORUS 2000. The 4th Korea-Russia International Symposium On Science and Technology / A. Bydzan, S. Panin. – Ulsan, South Korea: IEEE, 2000. – P. 337–341.
2. Kossov V. S. *Consideration of the gigacycle fatigue of steels in assessing the service life of critical railway equipment components* / V. S. Kossov, V. N. Oguenko, V. V. Oguenko. // Nauka ta Progres Transportu. Bulletin the Dnipropetrovsk National University of Railway Transport. – 2007. – №19. – P. 165–169.
3. *Use of the dynamic speckle-interferometry for non-contact diagnostics of fatigue crack initiation and determination of its growth rate* / [A. P. Vladimirov, I. S. Kamantsev, V. E. Veselova та ін.]. // Journal Tekhnicheskoi Fiziki. – 2016. – №4. – P. 85–90.
4. Mineev S. A. *Analysis of speckle pattern images of the deformed surface based on the optical flow algorithms* / S. A. Mineev, A. Y. Ugolnikov, L. B. Lozovskaya. // Vestnik Nizhegorodskogo Universiteta im. N.I. Lobachevskogo. – 2014. – №2. – P. 81–86.
5. *Effect of metallic surface roughness on the speckle pattern formation at diffraction plane* / J. B. Meireles, L. da Silva, D. P. Caetano, J. A. O. Huguenin. // Optics and Lasers in Engineering. – 2012. – №12. – P. 1731–1734.
6. Shih-Heng T. *Development of digital image correlation method to analyse crack variations of masonry wall* / T. Shih-Heng, S. Ming-Hsiang, S. Wen-Pei. // Sadhana. – 2008. – №6. – P. 767–779.
7. Kuksa L. V. *Methods of structural analysis of structurally heterogeneous materials with consideration of the anisotropy of physico-mechanical properties, scale and geometry factors* / L. V. Kuksa, L. M. Arzamaskova, E. E. Evdokimov. // Izvestiya Volgogradskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Ser.: Problems of Material Science, Welding and Strength in Mechanical Engineering. – 2008. – №10. – P. 112–118.

УДК 539.372, 539.38

ОПИСАННЯ КІНЕТИКИ ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЗА ДВОВІСНОГО НЕПРОПОРЦІЙНОГО АСИМЕТРИЧНОГО КОНТРОЛЬОВАНОГО ПО НАПРУЖЕННЯМ НАВАНТАЖЕННЯ

Бородій М. В., Адамчук М. П., Стрижало В. О.

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, м. Київ, Україна

***Анотація.** Розроблена версія ендохронної теорії пластичності для опису кінетики деформованого стану металевих матеріалів при асиметричному циклічному двовісному непропорційному навантаженні із контролем по напруженням. Для розв'язку отриманої нелінійної системи диференціальних рівнянь була створена чисельна процедура та написана відповідна обчислювальна програма. Запропоновано метод конкретизації параметрів експоненційних ядер спадкової функції, ендохронної теорії пластичності для описання ефекту ратчетингу за двовісного навантаження. В ньому використовується залежність параметра спадкової функції від швидкості ратчетингу на усталеній ділянці кривих циклічного деформування, яка визначається із експериментів або прогнозується теоретично на основі мінімальної кількості базових експериментів. Показано, що запропонована модель дозволяє з задовільною точністю описувати кінетику деформованого стану під час ратчетингу для довільних циклічних траєкторій навантаження.*

***Ключові слова:** ратчетинг; ендохронна теорія пластичності; непропорційне навантаження.*

Відомо, що за малоциклового асиметричного навантаження металів із контролем по напруженням виникає таке явище, як ратчетинг (або циклічна повзучість) – одностороннє накопичення пластичних деформацій в напрямку дії середніх напружень циклу σ_m . Ці переміщення є однією із можливих причин виникнення пошкоджень, руйнувань або втрати функціональної придатності конструкцій енергетичного машинобудування, авіації, транспорту тощо.

На сьогоднішній день є актуальними експериментальні та теоретичні дослідження ефекту циклічної повзучості за непропорційного навантажування. В літературі відомо багато робіт по даній тематиці, але поки що мають місце значні розбіжності в експериментальних та розрахункових даних. Зважаючи на це, можна зробити висновок, що проблема побудови простої моделі для інженерних розрахунків усе ще є актуальною.

Предметом аналізу є двовісне навантаження матеріалу по довільним кусково-ломаним траєкторіям у девіаторному просторі напружень. Розглядається випадок, коли відмінними від нуля є лише дві компоненти тензора напружень σ_x і τ_{xy} . Траєкторія навантаження задається кусково-ломаною лінією, кожна ділянка якої описується наступним рівнянням:

$$\sigma_x = k \cdot \sqrt{3} \tau_{xy} + \bar{\sigma}, \quad (1)$$

де k – коефіцієнт кута нахилу прямої; $\bar{\sigma}$ – координата точки перетину прямої з віссю σ .

Для описання кінетики напружено деформованого стану скористаємося рівняннями ендохронної теорії пластичності [1], що пов'язують відповідні компоненти тензора напружень σ_x , τ_{xy} з компонентами тензора пластичних деформацій ε^p , γ^p :

$$\sigma_x = \sigma_0 \frac{d\varepsilon^p}{dz} + \int_0^z E(z-z') \frac{d\varepsilon^p}{dz'} dz', \quad (2)$$

$$\sqrt{3} \tau_{xy} = \sigma_0 \frac{d\gamma^p}{\sqrt{3} dz} + \int_0^z E(z-z') \frac{d\gamma^p}{\sqrt{3} dz'} dz', \quad (3)$$

$$dz = d\xi / F, \quad (4)$$

$$d\xi^2 = (d\varepsilon^p)^2 + 1/3 (d\gamma^p)^2, \quad (5)$$

де σ_0 – початковий радіус поверхні текучості; z – внутрішній час; ξ – міра внутрішнього часу (параметр Одквіста); F – функція зміцнення; E – спадкова функція.

Оскільки первісна модель, що базується на визначальних співвідношеннях ендохронної теорії пластичності Валаніса [1], не дає змоги коректно прогнозувати процес ратчетингу, скористаємося запропонованим в роботі [2] удосконаленням рівнянь (2, 3) шляхом використання більш складного визначення спадкової функції E , а саме:

$$E(z, \delta) = E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta) \quad (6)$$

де E_1 , E_2 і α – параметри матеріалу.

Тобто модель будувалася із припущення, що кінематичне зміцнення, яке визначається спадковою функцією E , залежить не тільки від міри процесу деформування – внутрішнього часу z , але і від рівня напружень, досягнутих на попередньому півциклі навантаження. Останнє твердження припускає залежність спадкової функції E від характерної відстані δ між поточним максимальним значенням напружень у кожному півциклі і максимально досягнутим за всю історію навантаження, яка була запропонована для формулювання правила кінематичного зміцнення теорії течії. Таке удосконалення в рамках ендохронної теорії дозволило вирішити проблему змикання петель пружно-пластичного гістерезису і відкрило можливість описати явище ратчетингу матеріалів.

Зважаючи на сказане, для випадку двовісного навантаження, величини спадкової функції в окремих рівняннях ендохронної теорії пластичності (2) та (3) будуть приймати значення відмінні одне від одного, тобто:

$$\begin{aligned} E(z, \delta_\sigma) &= E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta_\sigma), \\ E(z, \delta_\tau) &= E_1 e^{-\alpha z} + E_2(\delta_\tau). \end{aligned} \quad (7)$$

Внаслідок відповідних перетворень рівнянь (1) – (5) з урахуванням (7) в роботі [3] була отримана система визначальних рівнянь, що описує напружено-деформований стан матеріалу на n -ій ($z_n \leq z \leq z_{n+1}$) ділянці кусково-ламаної траєкторії в просторі напружень:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_n + A_{\varepsilon_n} \dot{\varepsilon}_n + B_{\varepsilon_n} \varepsilon_n + C_{\varepsilon_n} &= \alpha \sigma_n + \dot{\sigma}_n, \\ \ddot{\gamma}_n + A_{\gamma_n} \dot{\gamma}_n + B_{\gamma_n} \gamma_n + C_{\gamma_n} &= \alpha \tau_n + \dot{\tau}_n, \\ \sigma &= k_n \cdot \tau + s_n, \\ F^2(z) &= (\dot{\varepsilon})^2 + (\dot{\gamma})^2, \end{aligned} \quad (8)$$

де A_{ε_n} , B_{ε_n} , C_{ε_n} , A_{γ_n} , B_{γ_n} , C_{γ_n} , s_n – константи матеріалу.

Дана нелінійна система рівнянь не має аналітичного розв'язку і розв'язувалась чисельно. Попередньо вона була зведена до вигляду системи диференційних рівнянь першого порядку. Ця система диференційних рівнянь початковими умовами (задача Коші) розв'язувалась чисельно методами Рунге-Кутти четвертого порядку. Для чисельної реалізації був розроблений алгоритм і складена відповідна обчислювальна програма. Згідно ітераційної процедури, на кожному кроці через відомі для поточного внутрішнього часу z_k значення функцій ε_k , $\dot{\varepsilon}_k$, γ_k , $\dot{\gamma}_k$, τ_k за відповідними формулами отримувались наступні для часу z_{k+1} значення ε_{k+1} , $\dot{\varepsilon}_{k+1}$, γ_{k+1} , $\dot{\gamma}_{k+1}$, τ_{k+1} . Перехід на наступну ділянку траєкторії навантаження відбувався лише в тому випадку, коли розраховані напруження з заданою точністю досягали необхідної величини, відтворюючи задану траєкторію навантаження. При цьому переході відбувалася зміна констант, що описують траєкторію навантаження, та із попередньої ділянки в якості початкових умов бралися відповідні значення напружень та деформацій.

Для розрахунку кінетики напружено-деформованого стану матеріалу за допомогою запропонованої моделі циклічної пластичності (8) також необхідно визначити невідомі

параметри спадкової функції (6), а саме різницю модулів пластичності на ділянках навантаження (E_2^+) та розвантаження (E_2^-):

$$\Delta E_2 = E_2^- - E_2^+ \quad (9)$$

На випадок аналізу складного двовісного навантаження для траєкторій з однаковими середніми та амплітудними (за Мізесом) напруженнями було використано наступне рівняння для визначення параметру спадкової функції E_2^+ :

$$E_2^+(\Phi) = E_2^- \bar{\xi}^s / (\bar{\xi}^s + \hat{\xi}(\Phi)), \quad (10)$$

де $\hat{\xi}(\Phi)$ – прогнозована швидкість ратчетингу на усталеній ділянці деформування для непропорційної траєкторії навантаження; $\hat{\xi}^s$ – ширина низхідної петлі гістерезису для базової траєкторії (розтяг-стиск).

Для визначення швидкості накопичення пластичних деформацій $\dot{\xi}$ на усталеній стадії деформування на основі даних одновісних базових експериментів і параметру непропорційності циклу Φ був використаний вираз [4]:

$$\dot{\xi}(\Phi) = (\hat{\xi}^s - \hat{\xi}^t)(1 - \Phi)\beta^I \beta^{II} + \hat{\xi}^t, \quad (11)$$

де Φ – параметр непропорційності циклу [5]; β^I – безрозмірний коефіцієнт, який враховує розмах напружень в напрямку дії середніх напружень циклу; β^{II} – безрозмірний коефіцієнт, який враховує вплив довжини траєкторії навантаження; $\hat{\xi}^s$, $\hat{\xi}^t$ – усталені швидкості ратчетингу з базових експериментів на розтяг-стиск та знакозмінне кручення, відповідно.

Щоб пересвідчитись, що запропонована модель коректно прогнозує кінетику деформованого стану, вона була використана для описання експериментальних кривих ратчетингу за навантаження зразків із нержавіючої сталі марки 304L одновісним розтягом-стиском та за двовісною хрестоподібною траєкторією [6] з однаковими середніми та амплітудними (за Мізесом) напруженнями ($\sigma_a = 200 \text{ МПа}$, $\sigma_m = 50 \text{ МПа}$). Константи матеріалу, що використовувались про розрахунках наведено в табл. 1.

Таблиця 1

Базові параметри моделі циклічної пластичності

| Сталь | E_0 , МПа | σ_0 , МПа | α | E_1 , МПа | E_2^- , МПа | C | β |
|-------|------------------|------------------|----------|------------------|---------------|-----|---------|
| 304L | $1,8 \cdot 10^5$ | 140 | 3000 | $1,6 \cdot 10^5$ | 5380 | 1,3 | 10 |

На ділянках траєкторії навантаження, де напруження σ приймалися позитивними, використовувалось значення параметру E_2^+ ($E_2^+ = 4530 \text{ МПа}$ для розтягу-стиску та $E_2^+ = 4725 \text{ МПа}$ для хрестоподібної траєкторії), при навантаженні в протилежному напрямку – E_2^- . При розрахунку хрестоподібної траєкторії на ділянках кручення використовувалось спадкове ядро $E^t = E^{\sigma^-} = E_1 e^{-\alpha z} + E_2^-$. На рис. 1, 2 зображені розрахункові і експериментальні [6] криві деформування для асиметричних траєкторій навантаження розтягом-стиском та у вигляді хреста відповідно, які показали задовільну збіжність результатів.

Таким чином запропонована модель циклічної пластичності на основі визначальних рівнянь ендохронної теорії здатна описувати кінетику деформованого стану за двовісного непропорційного асиметричного контрольованого по напруженням навантаження. Разом з тим спостерігається незначна невідповідність розрахункового розподілу поля деформацій по відношенню до експериментального. Це може бути викликано наступними причинами: недостатньою точністю визначення констант матеріалу, наприклад модуля пружності; незначним відхиленням розрахункової траєкторії деформування від експериментальної для виключення сингулярності в рівняннях; впливом точок зламу траєкторії тощо.

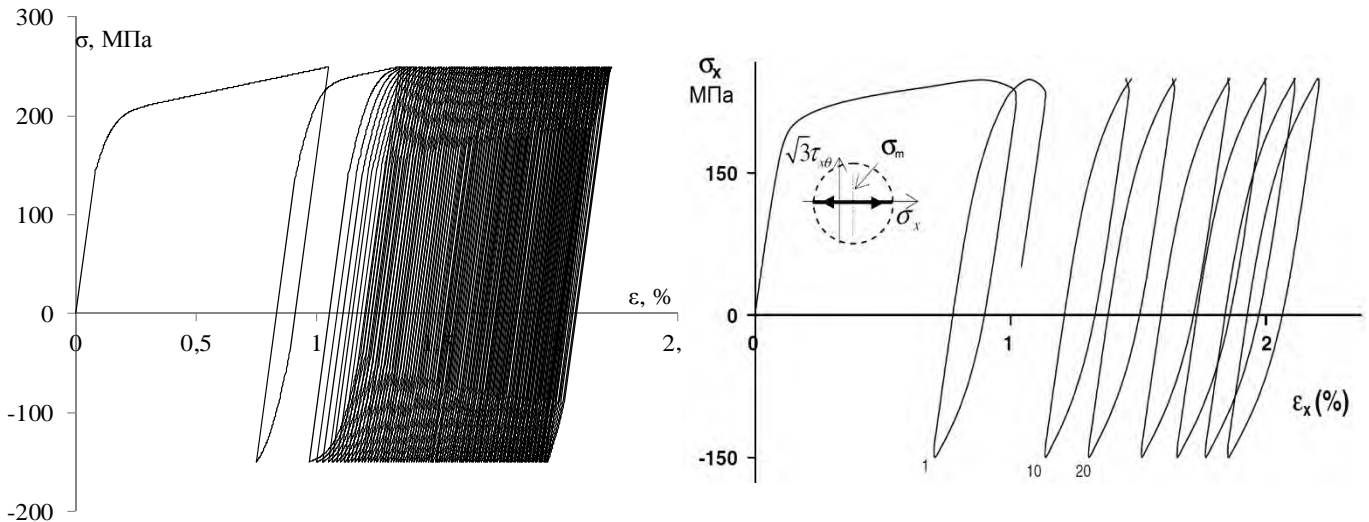


Рис. 1. Кінетика напружено-деформованого стану за навантаження розтяг-стиск:
а) – розрахунок, б) – експеримент

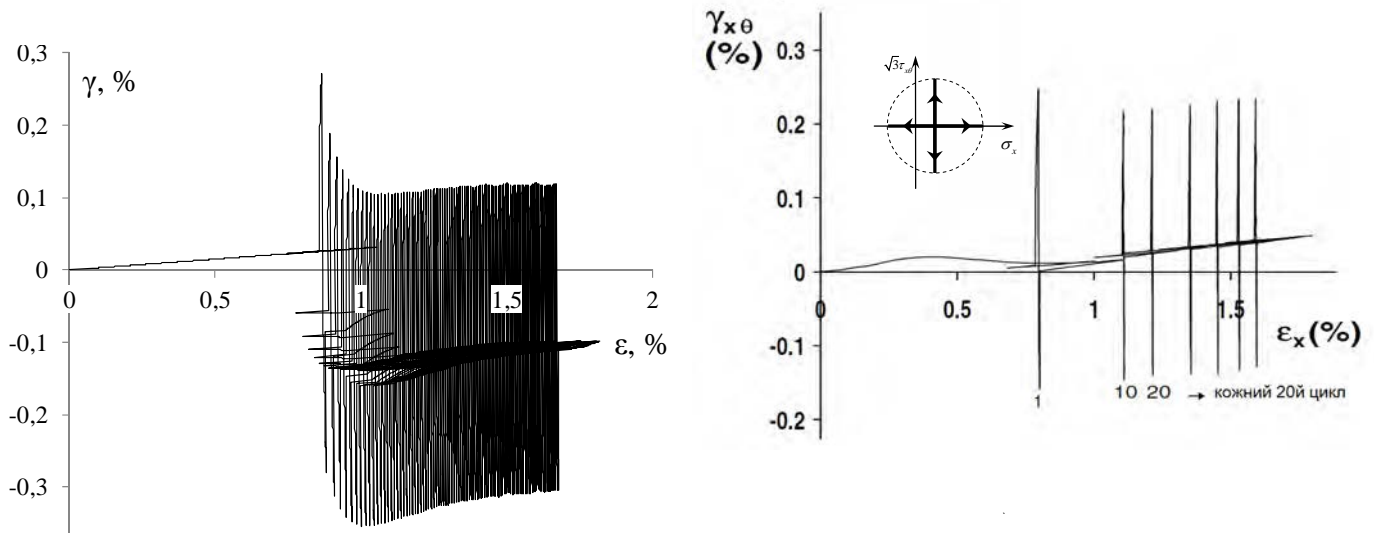


Рис. 2. Криві деформування при навантаженні за траєкторією "хрест":
а) – розрахунок, б) – експеримент

Список літератури.

1. Valanis K.C. *Fundamental consequences of new intrinsic time measure plasticity as a limit of the endochronic theory.* – Archives of Mechanics. – 1980. – 32. – P. 171-191.
2. Borodii M.V. *Modeling of the asymmetric low-cycle loading in the space of stresses.* – Strength of Materials. – 1998. – Vol.30. N5. – P. 472 - 480.
3. Adamchuk M.P., Borodii M.V., Selin O.M., Stryzhalo V.O. *Development of the model for cyclic plasticity to describe the ratcheting effect under non-proportional asymmetric loading.* – Strength of materials. – 2016. – Vol. 48, N2. – P.251-258.
4. Adamchuk M.P., Borodii M.V. *Determination of steady ratcheting strain rate under biaxial loading based on cycle nonproportionality coefficient.* – Strength of materials. – 2017. – Vol. 49, N2. – P.250-255.
5. Borodii M.V. *Determination of cycle nonproportionality coefficient.* – Strength of Materials. – 1995. – Vol.27. N5-6. – P. 265 - 472.
6. Hassan T., Taleb L., Krishna S. *Influence of non-proportional loading on ratcheting responses and simulations by two recent cyclic plasticity models.* - Int. J. Plasticity. – 2008. – Vol. 24. – P. 1863-1889.

UDC 539.3

PREDICTING FATIGUE LIFE OF SHORT FIBER REINFORCED VISCOELASTIC COMPOSITES

Maslov B.P.

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS Ukraine, Kyiv, Ukraine,

***Анотація.** Моделюється процес довготривалого руйнування в'язкопружних матеріалів при загальних тривісних умовах навантаження. Метою є оцінка залежності еволюції локальної концентрації напружень у часі від тривісності напружень і параметра Лоде. Визначальні рівняння матеріалу описуються з використанням похідних дробового порядку. Співвідношення напруження-деформація сформульовані на основі узагальнення моделі типу Работнова, яка описує цикли гистерезису зі зростаючими напруженнями при зростанні кількості циклів навантаження. Встановлено критерії для визначення числа циклів, які можуть викликати руйнування втоми для зразків при заданих амплітудах і частотах. В складних умовах навантаження розрізняються гідростатичні навантаження і різні стани напружень зсуву. Розглянуто суто тривісні макроскопічні умови навантаження з різними головними напруженнями. Пропонується узагальнена модель в'язкопружності із внутрішнім параметром пошкодження. Локальні та макроскопічні визначальні співвідношення виражені як спадкові інтеграли. Оскільки об'ємна концентрація фаз лишається незмінною у часі, то використовується принцип Вольтерра та перетворення Карсона. Для розрахунків використано програми Fortran 90 з бібліотеки NAG-Fortran. Концентрація напружень навколо включень змодельована, як приклад, у трикомпонентному композитному матеріалі на основі матриці з епоксидної смоли. Запропонована нелінійна модель, може бути корисною для прогнозу довготривалої міцності і неруйнівних засобів контролю стану композитів.*

Keywords: composite material, fatigue life, visco-elastic, stress concentration.

The composite materials used in progressive technics structures can experience fatigue damage and failure due to the repeated loads. Hence, the models that stimulate the response of composites under cyclic loads are necessary to design structures of long term strength. Theoretical estimation of remaining lifetimes and residual strength is an important modern problem of solid mechanics. The response of composite structures under fatigue loading is a rather new problem that has led to the development of a number of fatigue prediction models. The focus of this paper is on the strength degradation effects, continuum damage mechanics approach, and micromechanics models capabilities [1-3].

A commonly used approach in fatigue life predictions is to use stress versus life, known as $S-N$ curves. The constant amplitude cyclic loads are characterized by the mean stress level σ^m and the amplitude σ^a of the stress variations around the mean. This is alternatively expressed in terms of the maximum stress and the stress ratio or R -ratio. The situation is more complex in the case of heterogeneous media, strong stress triaxiality, and rheology time presence. For the analysis of creep fatigue problems in the framework of the quasi-linear viscoelasticity model, we use the correspondence principle, which is different from that used in the linear theory [4]. In this case, there is no assumption of an analogy between the defining relations of nonlinear elasticity and nonlinear viscoelasticity. Let t be the time, \mathbf{x} , $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ and $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ be the position, the current stress, the current strain, and the current displacement in three-dimensional case, respectively. We assume that the viscoelastic material possesses instantaneous elastic response $\boldsymbol{\sigma}^{el}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{e}^{el}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}^{el}(\mathbf{x}, t)$. The model requires that the loading curves and the unloading curves must fall in the same curve, and the stress and the strain must return to the origin simultaneously. It follows that there exists a strain energy function $W(\mathbf{e}, \mathbf{x}, t)$ with the property that

$$W = W(\mathbf{e}^{el}, \mathbf{x}, t), \quad \boldsymbol{\sigma}^{el} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}^{el}}. \quad (1)$$

This equation defines the nonlinear elastic constitutive relations. To formulate the correspondence principles, we write down the constitutive equations of quasi-linear viscoelasticity between the current stress $\boldsymbol{\sigma}(t)$ and the instantaneous (elastic) stress $\boldsymbol{\sigma}^{el}(t)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{el}(t) &= \mathbf{g} \star d\boldsymbol{\sigma} = \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t-t_1) d\boldsymbol{\sigma}(t_1), \quad \mathbf{g} = \mathbf{J}(t) / \mathbf{J}(0) \\ \boldsymbol{\sigma}^{el}(t) &= \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{e}(t)] = \mathbf{g} \star d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \star d\mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \star d\boldsymbol{\sigma}^{el}.\end{aligned}\quad (2)$$

And constitutive relations for creep

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{el}(t) &= \boldsymbol{\psi}[\boldsymbol{\sigma}(t)] = \mathbf{h} \star d\mathbf{e} = \mathbf{e} \star d\mathbf{h} = \mathbf{h} \star d\mathbf{e}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{E}(t) / \mathbf{E}(0) \\ \boldsymbol{\sigma}^{el}(t) &= \boldsymbol{\varphi}[\mathbf{e}(t)] = \mathbf{g} \star d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \star d\mathbf{g}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \star d\boldsymbol{\sigma}^{el}.\end{aligned}\quad (3)$$

Quasi-linear viscoelasticity allows generalizing the classical approaches in mechanics of composites [1]. We use here the enhanced viscoelastic model with internal parameter of stored damage D [3]. The local and overall constitutive relations between the infinitesimal strain $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ and the Cauchy stress $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ fields can be expressed as hereditary integrals. At the micro-scale of individual r constituents these are presented by [5]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{q}_r \star \mathbf{e}^{el})(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in v_r. \quad (4)$$

Space coordinate \mathbf{x} denotes a material point within any phase r of the composite and \star stands for the Stieltjes convolution product. Similarly, the macroscopic or effective constitutive relations can be written as

$$\langle \mathbf{e} \rangle(t) = (\tilde{\mathbf{q}} \star \left\langle \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\rangle)(t) \quad (5)$$

Here $\langle \mathbf{e} \rangle(t)$ and $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle(t)$ are the macroscopic, or averaged, strain and stress, the angle brackets denote spatial averaging over a representative volume element of the material. Four order tensors $\mathbf{q}_r(t)$ and $\tilde{\mathbf{q}}(t)$ are the local in phase r and effective creep reduced functions of the composite, respectively.

Basic concepts of damage mechanics were formulated at the theoretical level [1, 3, 5], in particular through thermodynamic formalism. Note that the nonlinear response of composite could be enhanced by strength reduction damage [6]. The strain equivalence hypothesis, which states that any deformation behavior, whether uniaxial or multi-axial, of a damaged material is represented by the constitutive laws of the virgin material in which the usual stress $\boldsymbol{\sigma}(t)$ is replaced by the so-called effective stress $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)$, which enables the definition of an effective stress

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \boldsymbol{\sigma}(t)(1-D)^{-1}. \quad (6)$$

Here $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ is defined as the stress in the effective (undamaged) state. Therefore, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(t)$ has been termed the effective stress. Thus, in the presence of damage ($0 < D < 1$), the effective area is reduced by a factor of $(1 - D)$, while the effective stress is increased by the same factor, so that the force $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\bar{A} = \boldsymbol{\sigma}A$ is preserved. In our model, the viscoelastic strain energy function $W(t)$ is coupled with damage parameter D . The expression of $W(t)$ is defined as [2]

$$2W(\mathbf{e}, t) = (1 - D(t)) \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial \mathbf{e}(t_1)}{\partial t_1} \mathbf{E}(2t - t_1 - t_2) \frac{\partial \mathbf{e}(t_2)}{\partial t_2} dt_1 dt_2, \quad (7)$$

$$Y = -\partial W / \partial D$$

where $\mathbf{E}(t)$ is the relaxation tensor. The internal scalar variable D models the damage, which is assumed to be isotropic and varies between 0 for undamaged material and 1 under complete failure. The thermodynamic force associated $\mathbf{e}(t)$ with D is denoted. The constitutive equation may be written in the compliance formulation to describe creep phenomena

$$2(1 - D(t))U(\mathbf{s}, t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(t_2)}{\partial t_2} \mathbf{J}(2t - t_1 - t_2) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(t_1)}{\partial t_1} dt_1 dt_2. \quad (1)$$

According to (5) in quasi-linear viscoelasticity, for the proposed viscoelastic model coupled with damage the expression of stress is written as

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (1 - D(t)) \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t - t_1) \frac{\partial W(\mathbf{e}, t_1)}{\partial t_1} dt_1. \quad (2)$$

The stress $\boldsymbol{\sigma}(t)$ is thus related to the damage variable $D(t)$ and to the whole history of viscoelastic strains through the energy $W(\mathbf{e}, t)$ via Boltzmann's hereditary integral. Note that the constant volume concentration of phases remains unchanged after transforming from the time domain to the Carson domain. The Fortran95 programs from NAG-Fortran library we use for numerical analysis required. Statistical averaging of expressions is performed to define the mean deformation of short inclusions randomly oriented in volume. The result is that overall response of such a composite is isotropic [7]. Stress concentration near inclusions and overall creep response are modeled in the three-component metal matrix composite with aluminum viscoelastic matrix [1].

In our work, we use Hashin's [2] failure criteria to determine the fiber and matrix failures in a multicomponent composite. Equations that summarize the failure envelopes for fiber and matrix failure are obtained from Hashin's criteria. In particular, short fibers and matrix failure in tension will be

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X_T} \right)^2 + \frac{\sigma_{12} + \sigma_{13}}{S_{12}^2} = 1, \quad \frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{Y_T^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{S_{23}^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{S_{12}^2} = 1. \quad (9)$$

In equations (9), X_T and X_C are the longitudinal tensile and compressive strengths, Y_T and Y_C are the transverse tensile and compressive strengths, S_{12} is the in-plane shear strength, and S_{23} is the out of plane shear strength. An instantaneous matrix stiffness degradation scheme is used for the progressive failure when matrix or fiber failure is detected. We evaluate here the residual stiffness of the representative volume following failure in each mode [2]. In other words, the fatigue model used here is based on stiffness and strength reduction directly applied to the engineering stiffness constants and strengths that are RVE properties. To quantify and visualize the level of damage, a measure of the relative reduction in the stiffness/strength parameter due to damage D_p is calculated using equation (9)

$$D_p = 1 - \frac{P_r}{P_{init}}. \quad (10)$$

The non-linear cumulative damage rule for isotropic viscoelastic composite materials is used here. Scalar damage variable $D(t)$ evolves with the number of cycles. The evolution of damage is governed by increment methods [5]

$$\int_{D_{(k-1)}}^{D_k} dD = \int_0^N [1 - (1 - D)^{1+\beta_f}]^{\alpha_f} \left(\frac{\sigma_k}{1 - D} \right)^{\beta_f} dN.$$

N is the number of cycles at the current stress state σ_k , D_k and D_{k-1} are the amount of damage after the current, and previous cycles, respectively, β_f is a material parameter, and α_f is a function of the current triaxial stress state [6].

The fatigue life of composites is evidently connected with stress concentration on the interphase surfaces. To present the formulation of the general interface model we introduce the following normal \mathbf{v} and tangent $\boldsymbol{\eta}$ projection tensors of second order

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}; \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{1} - \mathbf{v}. \quad (11)$$

Symbol $\mathbf{1}$ is the 3D second-order identity tensor. Let us construct further the normal \mathbf{N} and tangent \mathbf{T} projection tensors of fourth order by

$$\mathbf{N} = \mathbf{I} - \mathbf{T}; \quad \mathbf{T} = \boldsymbol{\eta} \otimes \boldsymbol{\eta}, \quad (12)$$

\mathbf{I} is the fourth-order identity tensor for the space of second-order symmetric tensors. In fact, \mathbf{T} and \mathbf{N} correspond to the exterior and interior projection operators of Hill [1]. Next, we write

$$\begin{aligned} N_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\delta_{ik}v_{jl} + \delta_{jk}v_{il} + \delta_{il}v_{jk} + \delta_{jl}v_{ik}) - v_{ij}v_{kl}, & T_{ijkl} &= \frac{1}{2}(\eta_{ik}\eta_{jl} + \eta_{jk}\eta_{il}) \\ \Gamma_{ijkl} &= (2\mu)^{-1} \left(N_{ijkl} - \frac{v}{1-v} n_i n_j n_k n_l \right); & \Pi_{ijkl} &= 2\mu \left(T_{ijkl} + \frac{v}{1-v} \eta_{ij}\eta_{kl} \right), \\ \Gamma(\mathbf{n}) &= (\mathbf{N} \mathbf{E} \mathbf{N})^{-1}, & \Pi(\mathbf{n}) &= (\mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T})^{-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

It can be shown that Γ is given by [1]

$$\Gamma(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}(\mathbf{G}(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{N} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{G}(\mathbf{n})), \quad (14)$$

where the second-order tensor \mathbf{G} is calculated by $\mathbf{G} = \mathbf{Q}^{-1}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \mathbf{E} \mathbf{n}$. In addition, the tensors $\Gamma(\mathbf{n})$, $\Pi(\mathbf{n})$, relaxation function $\mathbf{E}(t)$ and creep function $\mathbf{J}(t)$ are connected by the identity $\mathbf{J}\Pi + \Gamma\mathbf{E} = \mathbf{I}$.

Nonlinearity of metal matrix is connected with instant elastic properties and stored in time micro-defects. Some numerical examples were analyzed. Internal stress concentration and fatigue life was modeled for metal matrix composite with constituents: nonlinear visco-elastic Al8091 matrix ($\lambda = 44.93 \text{ GPa}$, $\mu = 31.0 \text{ GPa}$, $\nu_3 = -435 \text{ GPa}$), and nonlinear elastic boron and SiC short fibers. Properties of fibers are presented in Table 1 in [8]. Our approach realized here is taking into account not only mean field stress state [1] but local stresses near short fiber in viscoelastic matrix [8] due to cyclic external loading. As a part of conclusions it should be noted that results of fatigue life prediction with the model proposed are in an acceptable correlation with known from literature experimental data. Due to multi-parameter nature of process and used approach, it is needed to continue this work, especially in the sense of identification material constants.

References:

1. Aboudi J., Arnold S., Bednarczyk B. *Micromechanics of Composite Materials*.- Elsevier.-2013. – 1011 p.
2. Hashin Z. *Fatigue Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites* Transactions of the ASME. – 1981, **48**, No 12, 846-852.
3. Sumelka W., Voyiadjis G.A. *A hyperelastic fractional damage material model with memory* International Journal of Solids and Structures. – 2017, 124. – 151–160.
4. Golub V.P., Maslov B.P., and Fernati P.V. *Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress State. II. Deviators Proportionality*, International Applied Mechanics, 2016, **52**, N6, – P.111-125.
5. Caputo M., Carcione J.M. *Hysteresis cycles and fatigue criteria using anelastic models based on fractional derivatives*, Rheol Acta.-2011. – **50**, No 2, 107–115.
6. Danas K., Castaneda P. P. *Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials*, International Journal of Solids and Structures.-2012. – **49**, 1325–1342.
7. Maslov B.P. *Numerical-analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials*, International Applied Mechanics. – 2018.-**54**, No2, – P.113-124.
8. Maslov B. *Stress concentration in nonlinear viscoelastic composites*, Mechanics and Advanced Technologies, 2017, #1 (**79**), 5-10.

УДК 539.3

ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЕЛЕМЕНТІВ СОНЯЧНИХ БАТАРЕЙ

Бабенко А.Є., Боронко О.О., Трубачев С.І.
КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

***Анотація.** Представлен метод визначення динамічних характеристик багатошарових конструкцій, який базується на варіаційно-сітковому підході побудови скінченновимірних функціоналів, та їх мінімізації методом покоординатного спуску. Для визначення першої власної частоти та форми в роботі використовується метод квазістатичних ітерацій, а для другої та більш високих-метод підвищення жорсткостей, який оснований на використанні мінімаксних властивостей функціонала Релея-Рітца. Проведені розрахунки власних частот та форм коливань фотоелектричних модулів сонячних батарей.*

***Ключові слова.** Багатошарові конструкції, власні частоти коливань, власні форми коливань, метод підвищення жорсткостей, метод квазістатичних ітерацій, сонячні батареї, фотоелектричні модулі.*

Багатошарові конструкції знайшли широке впровадження в промисловість тому діагностика та аналіз міцності та надійності таких конструкцій є актуальною задачею. Саме такими конструкціями є сонячні батареї. Фотоелектричний модуль сонячних батарей являє собою шаруватий композит з жорсткими зовнішніми шарами і відносно податливим шаром наповнювача. В промисловості широко використовуються тришарові пластини з скляними зовнішніми шарами та основним шаром з полівінілбутирала (ПВБ) [1,2]. В процесі експлуатації шаруваті фотоелектричні модулі сонячних батарей зазнають вплив вібраційного навантаження, тому визначення динамічних характеристик даних конструкцій є необхідним для розрахунку на міцність. Внаслідок складної геометричної форми багатошарових систем, умов закріплення та видів навантаження аналітичні методи розрахунку виявляються не завжди ефективними, тому доцільно застосовувати чисельні методи розрахунку. В даній роботі використовується метод, що базується на варіаційно-сітковому підході. При цьому нескінченномірний простір допустимих функцій замінюється скінченномірним шляхом дискретизації досліджуемого об'єкта на скінченне число підобластей та апроксимації шуканих функцій в цих підобластях. Для шаруватих пластинчато-оболонкових систем в якості базової підобласті використовується трикутний елемент, в якому на відміну від інших моделей, застосовуються різні апроксимації переміщень за шарами. Переміщення в тонких несучих шарах апроксимуються лінійними та неповним кубічним поліномами, а для наповнювача приймається гіпотеза про лінійний розподіл переміщень по товщині. Використання даної моделі дає можливість визначити напружено-деформований стан, як кожного шару окремо, так і всього пакету в цілому. Слід підкреслити, що такий підхід дозволяє проаналізувати напружено-деформований стан багатошарових систем як з м'яким, так і з жорстким заповнювачем. При дослідженні міцності фотоелектричних модулів сонячних батарей, що знаходяться під дією вібраційних навантажень, основна складність полягає у визначенні спектру власних частот і форм коливань. В даній роботі для визначення спектра власних частот та форм коливань пропонується використовувати новий метод-метод підвищення жорсткостей, який оснований на використанні мінімаксних властивостей функціонала Релея-Рітца. При використанні метода підвищення жорсткостей для визначення 2-ї та більш високих власних частот та власних форм необхідно вирішити задачу мінімізації функціонала типу Релея

$$I(\vec{v})_{\vec{v} \in R^N} = \frac{U_h(\vec{v}) + c \sum_{n=1}^{l-1} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial T_h}{\partial z_i^{(n)}} v_i \right)^2}{T_h(\vec{v})} \quad (1)$$

Для визначення першої власної частоти та форми в роботі використовується метод квазістатичних ітерацій. Функціонал, який необхідно мінімізувати при використанні метода квазістатичних ітерацій має вигляд

$$I = \int_V U dV - \omega^2 \int_V T dV \quad (2)$$

де U и T - квадратичні форми, які є амплітудами потенціальної та кінетичної енергій.

Мінімізація побудованих функціоналів в даній роботі здійснюється методом покоординатного спуску. Величина кроку визначається з умови максимальної швидкості зменшення приросту функціонала ΔI^{k+1} . Застосування метода покоординатного спуску дозволяє запобігти відомим проблемам, що пов'язані з формуванням, оперуванням та зберіганням глобальних матриць мас, та жорсткостей, які мають велику розмірність при розв'язку задач динаміки. Окрім того метод по координатного спуску є стійкий ітераційний метод відносно помилок, що обумовлені точністю розв'язання задачі на ПЕОМ. Метод підвищення жорсткостей є найбільш ефективним та економічним методом з точки зору обчислювальних ресурсів порівняно з традиційним методом, в якому кожна наступна форма і частота знаходиться шляхом мінімізації на підпросторі, що ортогональний всім попереднім знайденим власним векторам. Слід підкреслити, що метод підвищення жорсткостей дозволяє визначити весь спектр власних частот і форм коливань, включаючи кратні, що важливо при розв'язуванні задачі о вимушених коливаннях механічних систем. В таблиці 1 приведені результати розрахунку перших десяти власних частот фотоелектричного модуля сонячної батареї. При розрахунку вимушених коливань шукані функції розкладаються в ряд Фур'є за власними формами коливань. Зовнішнє та внутрішнє в'язке тертя може бути враховано за умови, що матриця демпфування пропорційна матриці жорсткості або матриці мас.

Таблиця 1.
Власні частоти тришарового фотоелектричного модуля з середнім шаром з ПВБ

| № | ω , Гц | № | ω , Гц |
|---|---------------|----|---------------|
| 1 | 77,31435 | 6 | 697,9014 |
| 2 | 226,2717 | 7 | 1004,343 |
| 3 | 398,9698 | 8 | 1023,139 |
| 4 | 527,2266 | 9 | 1138,941 |
| 5 | 558,7838 | 10 | 1441,973 |

Список літератури:

- Schulze, S.-H., Pander, M., Naumenko, K. und Altenbach, H. "Analysis of laminated glass beams for photovoltaic applications". In: *International Journal of Solids and Structures* 49(15-16), 2012, S. 2027–2036. ISSN: 0020-7683. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.03.028.
- Assmus, M., Naumenko, K. und Altenbach, H. "A multiscale projection approach for the coupled global-local structural analysis of photovoltaic modules". In: *Composite Structures* 158, 2016, S. 340–358. ISSN: 02638223. DOI: 10.1016/j.compstruct.2016.09.036.

УДК 620.171.3: 616.71-001.5

ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖОРСТКОСТІ СТЕРЖНЕВИХ АПАРАТІВ ФІКСАЦІЇ ВОГНЕПАЛЬНИХ ПЕРЕЛОМІВ

Шидловський М.С.¹, Лакша А.М.², Мусієнко О.С.¹¹КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ²Українська військово-медична академія, м. Київ

Анотація. У роботі розглядається експериментальний метод оцінки оптимального розташування апаратів зовнішньої фіксації вогнепальних переломів довгих кісток людини. За неможливості проведення прямих дослідів на пацієнтах, було запропоновано випробувати натурний препарат великогомілкової кістки зі встановленим на ньому стандартним стержневим апаратом фіксації перелому. Реалізовано чотири типи навантаження: стиск, згин вздовж площини стержнів, згин поперек площини стержнів та кручення.

Порівняно характеристики жорсткості різних видів розташування стержнів. На підставі отриманих результатів було описано метод експериментального визначення жорсткості системи. Визначено оптимальне розташування стержнів фіксації вогнепальних переломів довгих кісток людини для кожного типу навантаження. Запропоновано розміщення стержнів для застосування на реальних пацієнтах.

Ключові слова: вогнепальні переломи, остеосинтез, експериментальні випробування.

Вступ. Вогнепальні поранення кінцівок є серйозними пошкодженнями опорно-рухового апарату. В результаті воєнних дій кількість і ступінь відкритих переломів значно зростає. Фіксація таких поранень, крім клінічних параметрів, повинна мати стандартні механічні характеристики, зокрема, достатня міцність, жорсткість та стабільність при транспортуванні потерпілого або під час довготривалого лікування.

Для лікування вогнепальних переломів у 20-25% поранених використовують позавогнищевий остеосинтез. [1-3].

Внаслідок взаємодії снаряду з кісткою відбувається зміна характеристики жорсткості кісткової тканини в ділянці вогнепального перелому та в околі 40 мм від нього[4,5]. При такій умові встановлювати стержневий апарат зовнішньої фіксації (СтАЗФ) за схемою, що використовується для звичайного (не вогнепального) перелому кістки, недопустимо, так як стрижні, що знаходяться поблизу місця перелому, потраплятимуть у пошкоджену кісткову тканину. Розташування елементів фіксації при вогнепальному переломі (стержні 2 і 3 на рис. 1а) у пошкодженій кістковій тканині може привести до руйнування кістки, тому раціонально змістити їх в неушкоджену область.

Відсутність спеціалізованих систем фіксації вогнепальних переломів ставить задачу визначення раціонального розташування стержнів для вже існуючих фіксаторів.

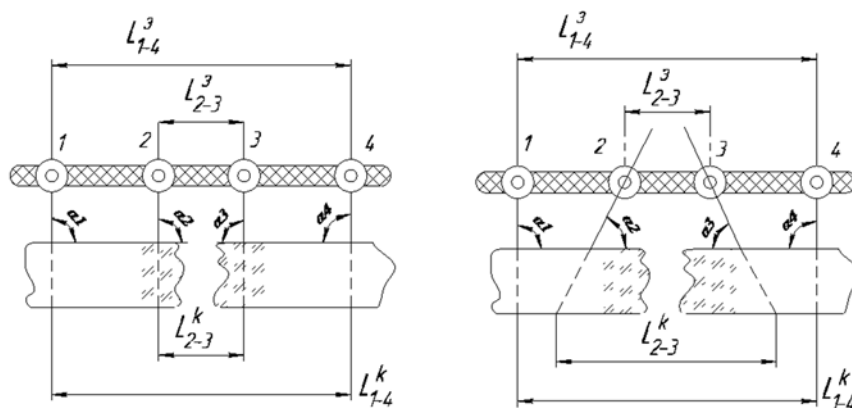


Рис. 1 Геометричні характеристики різних компонок системи: 1, 2, 3, 4 - стержні СтАЗФ

В експериментах застосовували стандартний стержневий апарат. В табл. 1 приведені геометричні характеристики різних компоновок системи «великогомілкова кістка - СТАЗФ», що піддані випробуванням. Позначення геометричних характеристик показані на рис. 1. При подальшому аналізі прийняті такі позначення компоновок стержнів СТАЗФ: А- стандартна компоновка; В, D- розведені стержні 2 та 3, закріплені під різними кутами

Таблиця 1

Геометричні характеристики різних компоновок системи «сталевий стержень (імітатор кістки) - СТАЗФ» та системи «великогомілкова кістка - СТАЗФ», що піддані випробуванням

| Геометричні характеристики | Система «великогомілкова кістка - СТАЗФ» | | | |
|----------------------------|--|-----|-----|-----|
| | А | В | С | Д |
| Н, мм | 94 | 94 | 94 | 94 |
| L_{1-4}^3 , мм | 255 | 255 | 255 | 255 |
| L_{2-3}^3 , мм | 79 | 131 | 35 | 5 |
| L_{1-4}^K , мм | 255 | 255 | 255 | 255 |
| L_{2-3}^K , мм | 82 | 134 | 105 | 110 |
| $\alpha_1, ^\circ$ | 90 | 90 | 90 | 90 |
| $\alpha_2, ^\circ$ | 90 | 90 | 75 | 60 |
| $\alpha_3, ^\circ$ | 90 | 90 | 75 | 60 |
| $\alpha_4, ^\circ$ | 90 | 90 | 90 | 90 |

Систему встановлювали на рухомому столі випробувальної машини, навантаження прикладали шляхом вертикального переміщення стола. При випробуванні реалізовано 4 види навантаження: стиск (рис. 2а), згин у площині розміщення стержнів (рис. 2б), згин перпендикулярно цій площині (рис. 2в) та кручення (рис. 2г).

Передачу зусилля, що діє на зразок при підйомі робочого стола здійснювали за допомогою сталевго стержня діаметром 5 мм.

Способи закріплення препаратів на робочому столі випробувальної машини та режими випробувань систем остеосинтезу, що були застосовані в даних експериментах, в описані в [4].



а



б



В

Г

Рис. 2. Види навантаження системи СтАЗФ: а - стиск; б - згин в площині розміщення стержнів; в - згин в перпендикулярній площині; г - кручення

Аналіз результатів. По закінченні дослідження отриману інформацію фіксували у вигляді діаграми деформування в координатах «Р - Δ», де Р - зусилля, прикладене до системи; Δ - переміщення точки, до якої прикладене навантаження.

Одержані діаграми деформування у дослідженому діапазоні зусиль практично лінійні, тому для порівняння способів розташування стержнів зручно використовувати жорсткості $C = P / \Delta$ (Н/мм).

Результати досліджень для приведено у вигляді таблиці для жорсткості системи (табл.2).

Таблиця 2

Порівняльна таблиця жорсткостей систем СтАЗФ при різному просторовому розміщенні стержнів при дії різних видів навантажень (Н/мм)

| Розташування стержнів | Вид навантаження | | | |
|--|------------------|-------------------------------|-------------------------|----------|
| | Стиск | Згин | | Кручення |
| | | в площини розміщення стержнів | перпендикулярно площини | |
| Система «великогомілкова кістка - СтАЗФ» | | | | |
| Стандартне розташування (А) | 22,88 | 3,44 | 1,009 | 3,87 |
| Розведення стержнів 2, 3 (В) | 19,44 | 2,85 | 0,900 | 3,45 |
| Стержні 2 і 3 під кутом 75° (С) | 23,07 | 3,45 | 1,026 | 3,92 |
| Стержні 2 і 3 під кутом 60° (D) | 28,62 | 3,53 | 1,844 | 3,93 |

Висновки.

Випробування показали, що збільшення відстаней між стержнями 2 і 3 зменшує жорсткість системи. При переміщенні стержня на 40 мм від стандартного розташування жорсткість істотно зменшується. Так при стиску жорсткість зменшилась на 15%, при згині вздовж площини стержнів жорсткість впала на 17%, а при згині поперек площини стержнів

жорсткість зменшилась 11 на %. В свою чергу при крученні падіння жорсткості системи не перевищує 10%.

При зміні кута на 15° та 30° для системи «великогомілкова кістка - СтАЗФ» жорсткість стає більшою порівняно зі «стандартною» на 20 % в середньому.

Для використання стержневих апаратів для тимчасового закріплення переломів в польових шпиталях та транспортування постраждалих рекомендовано використовувати таку схему розміщення: система з розташуванням стержнів на відстані 40 мм від перелому та під кутом 60° до площини кістки. Якщо ж не можливо реалізувати таке розташування, то рекомендовано використовувати фіксацію під кутом 75°.

Список літератури:

1. Schmidt. Fixateur externe: Montagen, Tipps, Tricks, Verbote / Schmidt // Symposium Septische Unfallchirurgie und Orthopädie / Schmidt. – Hamburg: Schön Klinik, 2010. – S. 51.
2. Nayagam S. Galaxy Fixationssystem – untere Extremität/S. Nayagam, A. C. Maquelet//Orthofix.– 2016. – 76 S.
3. Seligson D. Hoffmann 3 Modulare externe Fixation – OP-Technik / D. Seligson, A. R. Burgess, M. Osgood, C. T. Andrews // Stryker. – 2016. – 52 S.
4. Шидловський М. С. Експериментальні дослідження засобів остеосинтезу. / М. С. Шидловський, А. М. Лакша. – К.: Ленвіт, 2017. – 227 с.
5. Шидловський М. С. Метод оценки биомеханических характеристик костной ткани в области огнестрельного перелома / М. С. Шидловський, А. М. Лакша, А. А. Лакша. // В кн.: Тези доповідей XV міжнародної науково-технічної конференції «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта». – 2014. – С. 30–32.

УДК 621.791

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВАННЯ ЖАРОМІЦНИХ НІКЕЛЕВИХ СПЛАВІВ

Лабарткава А.В., Мартиненко В.О., Коваль С.С., Лабарткава О.В.

Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв, Україна

Анотація. При виготовленні деталей газотурбінних двигунів застосовуються жароміцні сплави. Для виправлення поверхневих дефектів литва використовують паяння з нагріванням деталей у вакуумних печах. Застосування локальних методів нагрівання з винесенням процесу в атмосферу дозволяє значно підвищити ефективність процесу, але ливарні сплави мають високу схильність до утворення гарячих тріщин. Методом комп'ютерного моделювання, було досліджено температурні поля дії різних типів джерел нагріву.

Ключові слова: жароміцні сплави, напружено-деформований стан, моделювання, температурні поля, джерела нагріву, малоамперна рагонова дуга, ацетилено-кисневе полум'я, мікроплазмова дуга

При виготовленні деталей газотурбінних двигунів застосовуються жароміцні нікелеві дисперсійнозміцненні ливарні сплави. Для виправлення поверхневих дефектів литва сьогодні використовують паяння з нагріванням деталей у вакуумних печах [1]. Застосування локальних методів нагрівання з винесенням процесу в атмосферу дозволяє значно підвищити ефективність процесу, але ливарні сплави мають високу схильність до утворення гарячих тріщин [2,3]. Тому і метою даної роботи є дослідження і визначення закономірностей формування напружено-деформованого стану (НДС), що дозволяє рекомендувати найбільш сприятливе джерело тепла за НДС та захистом металу. Для цього використовуємо метод математичного моделювання [4,5]. Дослідження виконувалось методом комп'ютерного моделювання, заснованим на методі кінцевих елементів, з використанням програмного комплексу ANSYS.

Досліджувався розподіл температур при локальному нагріванні основного матеріалу (сплаву типу ЧС88У-ВІ) [6]. Як фізичну модель було обрано циліндр діаметром 200 мм і товщиною 5 мм. Внаслідок симетрії зразка щодо осі розв'язувалась осесиметрична задача із заданими відповідними граничними умовами.

З урахуванням специфіки завдання, наявності великих градієнтів температур у вузькій зоні поблизу впливу джерела тепла використовувалася розбивка зі змінними розмірами скінченні елементи (СКЕ). Використовувалися температурно-залежні властивості сплаву – коефіцієнт теплопровідності і ентальпія.

Модель навантажували тепловим потоком уздовж вертикальної осі Y . Тепловий потік точно описується нормальним законом розподілу, параметри якого тісно пов'язані з тепловими характеристиками джерела нагріву. Згідно з дослідженнями [7-11] коефіцієнт зосередженості теплового потоку k може змінюватися в межах від $0,17...0,39$ $1/\text{см}^2$ для ацетилено-кисневого полум'я, до $32...38$ $1/\text{см}^2$ для малоамперної аргонової дуги прямої полярності.

Досліджувалося три типи джерел нагріву: ацетилено-кисневе полум'я; мікроплазмова дуга; малоамперна аргонова дуга прямої полярності.

Час впливу джерела нагріву на зразок підбирався таким чином, щоб максимальна температура не перевищувала 1200 $^{\circ}\text{C}$.

За результатами моделювання побудовані температурні поля в момент часу після закінчення нагрівання, а також після 5 і 15 секунд охолодження.

Аналіз полів розподілу температур при мінімально можливих теплових потужностях джерел нагріву в момент часу після закінчення нагрівання показав, що при впливі ацетилено-кисневого полум'я протягом десяти секунд максимальна температура досягає 840 $^{\circ}\text{C}$. При впливі малоамперної аргонової дуги максимальна температура становить 1200 $^{\circ}\text{C}$, при цьому час дії джерела дорівнює 2 секундам. Мікроплазмова дуга на мінімальному режимі за 2 секунди нагріває сплав до 1100 $^{\circ}\text{C}$.

Для середніх теплових потужностей джерел нагріву в момент закінчення нагрівання ацетилено-кисневе полум'я за 10 секунд нагріває сплав до 1200 $^{\circ}\text{C}$. При дії малоамперної аргонової дуги протягом однієї секунди максимальна температура становить 2800 $^{\circ}\text{C}$. При середній тепловій потужності мікроплазмова дуга за 1 секунду нагріває сплав до $1500...1600$ $^{\circ}\text{C}$.

Ацетилено-кисневе полум'я з максимальною тепловою потужністю за 10 секунд нагріває сплав до 1750 $^{\circ}\text{C}$. Малоамперна аргонова дуга максимальної потужності, за 0,1 секунди нагріває сплав до 2150 $^{\circ}\text{C}$. Мікроплазмова дуга максимальної потужності за 1 секунду нагріває сплав до 2500 .

Аналіз епюр розподілу температур на верхній поверхні показав, що при використанні ацетилено-кисневого полум'я радіус (ширина) зони нагріву від максимальної температури до 500 $^{\circ}\text{C}$ знаходиться в інтервалі від 20 до 35 мм. При цьому час впливу джерела нагріву на сплав дорівнює 10 секундам. При використанні як джерела нагріву малоамперної аргонової дуги радіус (ширина) зони нагріву від максимальної температури до 500 $^{\circ}\text{C}$ лежить в інтервалі від 7 до 10 мм. Радіус зони нагріву від максимальної температури до 500 $^{\circ}\text{C}$ при використанні мікроплазмової дуги дорівнює від 12 до 18 мм.

Так, при нагріванні зразка ацетилено-кисневим полум'ям різної потужності протягом 10 с температура зворотної поверхні зразка становить від 600 до 1400 $^{\circ}\text{C}$, а радіус (ширина) зони нагріву від максимальної температури до 500 $^{\circ}\text{C}$ знаходиться в інтервалі від 10 до 32 мм. При впливі малоамперної аргонової дуги зворотна сторона зразка прогрівається до 300 $^{\circ}\text{C}$ на мінімальному режимі, до 450 $^{\circ}\text{C}$ на середньому режимі на максимальному режимі через короткий час нагріву (0,1 с) температура зворотної поверхні не перевищує 20 $^{\circ}\text{C}$. Використання як джерела нагріву мікроплазмової дуги призводить до підвищення температури зворотної поверхні зразка від 200 до 400 $^{\circ}\text{C}$ залежно від потужності і часу впливу джерела.

Висновки:

1. При ремонті та виготовленні деталей із високоміцних сталей та сплавів аргонодугове джерело нагрівання має обмежене застосування. Це пов'язано з високою швидкістю нагрівання та охолодження, що може сприяти появі гарячих тріщин та деформацій конструкції.

2. Найбільш оптимально для відновлення деталей з жароміцних сплавів використовувати ацетилено-кисневого полум'я або мікроплазмову дугу. При цьому потужність джерел повинна знаходитися в інтервалі від 400 до 800 Дж. Ацетилено-кисневе полум'я за рахунок великого коефіцієнта зосередженості дуги дає більш високу температуру і більш високий градієнт.

3. При використанні ацетилено-кисневого полум'я радіус (ширина) зони нагріву від максимальної температури до 500 °С знаходиться в інтервалі від 20 до 35 мм. При цьому час впливу джерела нагріву на сплав дорівнює 10 секундам. При використанні як джерела нагріву малоамперної аргонової дуги радіус (ширина) зони нагріву від максимальної температури до 500 С лежить в інтервалі від 7 до 10 мм. Радіус зони нагріву від максимальної температури до 500 С при використанні мікроплазменної дуги дорівнює від 12 до 18 мм.

Список літератури:

1. *Производство сварных конструкций судовых газовых турбин: Учебн. пособ.* / Ю.В. Бутенко, В.В. Квасницкий, В.Ф. Квасницкий, А.Ю. Бутенко. – Николаев: НУК, 2013, 164 с.
2. *Горячие трещины при сварке жаропрочных сплавов* / М.Х. Шоршоров, А.А. Ерохин, Т.А. Чернышов и др. М.: Машиностроение, 1973. – 224с.
3. *Пинчук, Н.И. Влияние первичной структуры литых никелевых сплавов на обособление горячих трещин при сварке* / Н.И. Пинчук, И.К. Рязанцев // Автоматическая сварка. – 2004 - №2. – С.20-27.
4. *Барашиков А.С., Шоршоров М.Х. К оценке эффективного радиуса подвижного нормально-кругового источника на поверхности плоского слоя по ширине зоны проплавления* // Сварочное производство. 1990. № 8. С. 12-14.
5. *Березовский Б.М., Стихин В.А. Расчет параметров распределения теплового потока поверхностной сварочной дуги* // Сварочное производство. 1980. № 2. С. 17-19.
6. *Структура, фазовый состав и свойства коррозионно-стойкого жаропрочного сплава ЧС88У* / Е.В. Монастырская, Г.И. Морозова, Ю.Б. Власов // Металловедение и термическая обработка металлов. – 2006. – №8. – с.39-44.
7. *Genetic algorithm based optimization of the process parameters for gas metal arc welding of AISI 904 L stainless steel* / P. Sathya [et al.] // Journal of Mechanical Science and Technology. 2013. Vol.27, Issue 8. P. 2457-2465.
8. *Гладкий, П. В. Плазменная наплавка* [Текст] / П. В. Гладкий, Е. Ф. Переплетчиков, И. А. Рябцев. – К. : Экотехнология, 2007. – 292 с.
9. *Каховський, М.Ю. Взаємозв'язок теплових характеристик малоамперної дуги і напружено-деформованого стану зварних з'єднань зі жароміцних нікелевих сплавів вузлів газотурбінних двигунів військової і транспортної авіації* / М.Ю.Каховський, А.В.Гуляев, О.В.Яровіцин, М.О.Червяков // Озброєння та військова техніка 4(12)/2016
10. *Лыков А.В. Теория теплопроводности.* – М.: Высшая школа, 1964. – 599 с.
11. *Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке.* – М.: Машгиз, 1951. – 296 с.

УДК 620.172.251.226

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ АНІЗОТРОПНИХ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПОЗИЦІЙНОГО МАТЕРІАЛУ

Мартиненко В.Г.

Національний Технічний Університет «Харківський Політехнічний Інститут»,
м. Харків, Україна

Полімерні армовані композиційні матеріали (ПАКМ) використовуються в галузях автомобіле-, авіа- та космічного будівництва, у важкій промисловості та виробництві товарів загального споживання [1, 2].

Під час експлуатації композиційні елементи конструкцій та машин піддаються впливу підвищених температур та високих рівнів навантажень. Оскільки зазвичай вони є тонкостінними елементами, для підтримки їхньої працездатності важливо точно розрахувати їхню поведінку під впливом змінних температур та високих навантажень [3-5].

Таким чином, дослідження механічних властивостей композиційних матеріалів є актуальною на даний момент задачею, оскільки моделювання механічної поведінки та визначення міцності композиційних елементів машин є вкрай важливим при їхньому проектуванні.

Через наявність спрямованих армуючих волокон механічні властивості композиційних матеріалів є анізотропними. Окрім того, властивості полімерної матриці ПАКМ є дуже чутливими до зміни температур [6], особливо при переході через температуру склування – таке значення температури, при перевищенні якого полімер змінює свою мікроструктуру, а форма його молекул стає рухливою під впливом зовнішніх навантажень [7]. Це призводить до прояву разом із явищем пружності (тобто лінійної зміни деформацій тіла під впливом навантажень через зміну відстаней між молекулами) явища в'язкопружності – процесу росту деформацій у часі при постійних напруженнях та релаксації напружень у часі при постійних деформаціях [8]. Лінійна в'язкопружність характеризується інтегральною пропорційністю між деформаціями та напруженнями, а також є зворотнім процесом – при знятті навантажень в'язкопружні деформації з плином часу повертаються до початкового рівня [9].

На даний момент немає єдиної методики моделювання механіки твердих тіл, що деформуються, виконаних з анізотропних в'язкопружних матеріалів. Існують багато підходів, що засновані на аналітичних [10, 11], чисельно-аналітичних [12] або чисельних методах [13]. Зазвичай кількість необхідних параметрів в'язкопружності може бути обмежена не тільки можливістю їхнього експериментального визначення, а й спроможністю розрахункової моделі врахувати ці параметри [14]. Але достатня кількість робіт продемонструвала можливість та необхідність врахування ортотропної в'язкопружності в математичних моделях механічної поведінки твердих тіл, що деформуються, зокрема, полімерних армованих композиційних матеріалів [13, 15-18].

Дослідження анізотропних в'язкопружних властивостей ПАКМ є складною інженерною задачею. Її розв'язання потребує, по-перше, виконання експериментів на розтягування композиційних зразків, вирізаних у різних напрямках, кількість яких залежить від ступеня анізотропії механічних властивостей, по-друге, правильного закріплення зразків у експериментальній машині для уникнення небажаних деформацій в тримачах, по-третє, нагріву зразків однорідним та незмінним у часі температурним полем і, по-четверте, точного заміру деформацій в'язкопружності на протязі достатньо великого проміжку часу.

Композиційний матеріал, що розглядається, є поєднанням епоксидної смоли з довгими скляними спрямованими волокнами [19, 20]. Схема ортогонального плетіння матеріалу

забезпечує високі міцнісні властивості тонких оболонок, виготовлених з цього матеріалу, що піддаються силам розтягування або згину, зберігаючи його легку вагу (приблизно чверть порівняно із аналогічним значенням для сталі). У той же час цей композитний матеріал не настільки міцний, як вуглепластик, через слабші механічні властивості скловолокна, але значно дешевший завдяки низькій ціні їх виробництва у порівнянні з вуглецевими волокнами.

Геометрія зразків була розроблена відповідно до стандарту ASTM D638 [21]. На рисунку 1 зображено фотографію зразків товщиною 2 мм.

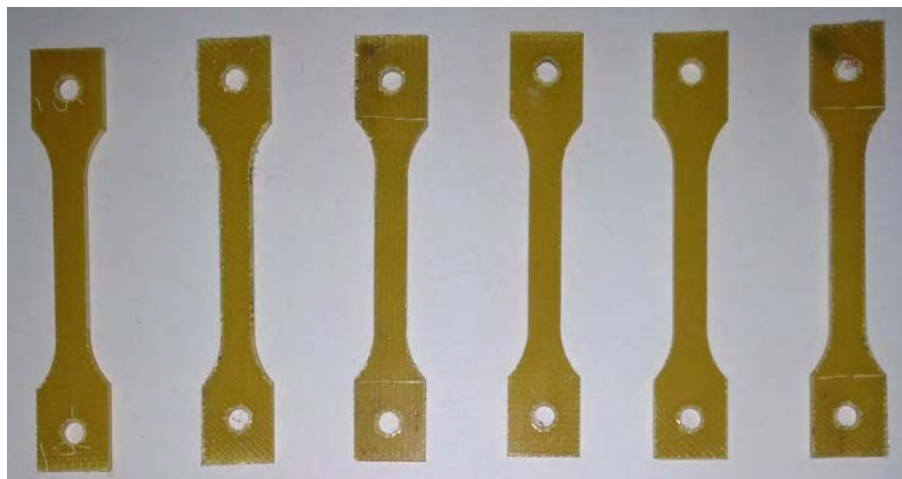


Рис. 1 – Зразки, вирізані з композиційного матеріалу під різними кутами до напрямку армування

У зразках містяться отвори діаметром 4 мм на кінцях, щоб забезпечити їх збірку в експериментальній машині. Після монтажу кінці зразків були затягнуті тримачами, щоб уникнути концентрації напружень навколо отворів і забезпечити повну фіксацію кінців зразка. Зразки вирізані з однієї композиційної пластини товщиною 2 мм під кутами 0° , 45° та 90° до першого напрямку армування. Зразки навантажуються у напрямку їх довшої сторони. Залежно від напрямку вирізання це призведе до одного з трьох станів навантаження армуючої сітки композиційних зразків.

Такі схеми навантаження дозволили отримувати плоскі механічні властивості композиційного матеріалу. Визначення механічних властивостей у третьому напрямку (перпендикулярно до площини пластини) вимагає випробувань на розтягування або стискання в цих напрямках, які важко реалізувати. Проте при моделюванні механічної поведінки тонких композиційних пластин та оболонок, що піддаються силам розтягування та згинання, існує потреба лише у плоских властивостях.

Під час проведення експериментів зразок фіксувався в тримачах, тоді як нагрівальний елемент розташовувався навколо нього. Відносно переміщення захватів вимірювалося двома індикаторами, а постійність температури контролювалася датчиком. Нагрівальний елемент забезпечує плавне підвищення температури до 100°C , підтримуючи її в межах не більше $\pm 2^\circ\text{C}$, як це вимагається у стандарті.

Для перевірки правильності закріплення зразків вони були навантажені до розриву, як це показано на рис. 2, *а* та 2, *б* для зразків, вирізаних під кутами 0° та 45° до першого напрямку армування відповідно. Як видно з рисунків, розрив відбувається в місці робочої частини зразків, що свідчить про ефективність розроблених захватів.

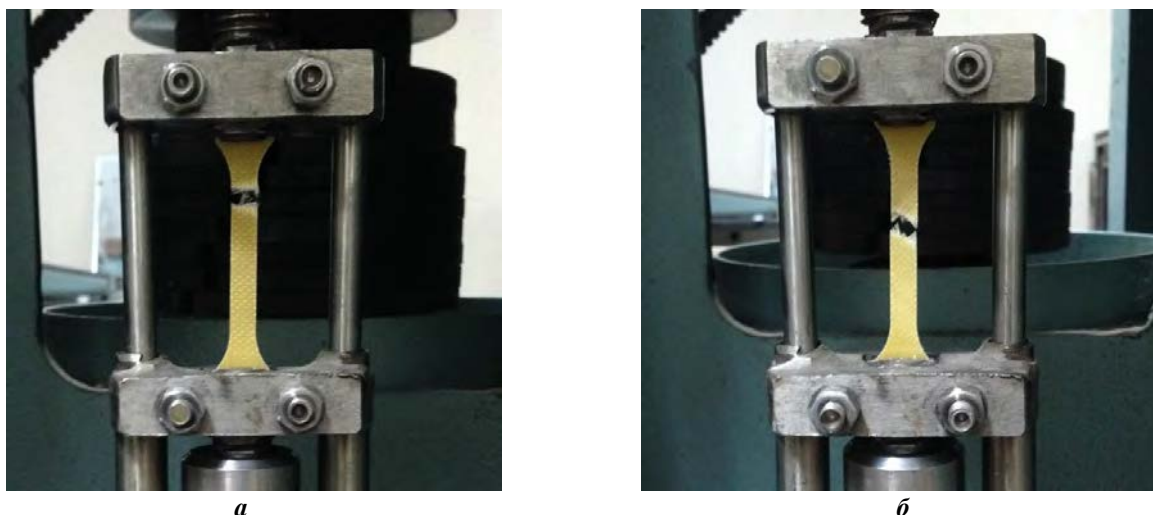


Рис. 2 – Розрив зразків, вирізаних під різними кутами до першого напрямку армування: *a* – під кутом 0° до першого напрямку армування; *б* – під кутом 45° до першого напрямку армування

В процесі дослідження миттєвих пружнопластичних властивостей композиційного матеріалу були побудовані його діаграми розтягування для різних напрямків навантаження при кімнатній та підвищених температурах. Це дозволило визначити миттєві технічні пружні постійні досліджуваного композиту, а також його границі текучості та тимчасового опору розриву. Характер отриманих діаграм свідчить про належність композиційного матеріалу, що розглядався, до класу пластичних матеріалів із виразною площадкою текучості.

Дослідження в'язкопружних властивостей зразків з ПАКМ проводилося при температурах вище за температуру склування та нижче за температуру зміни фазового стану полімеру – від 70°C до 130°C . В результаті цього час до встановлення постійних за часом деформацій варіювався від доби до півгодини в залежності від температури, що прикладалась до зразку.

Після заміру змінних за часом деформацій зразків були побудовані точкові графіки повзучості для різних напрямків вирізання та температур. Їхня обробка дозволила отримати точкові залежності від часу технічних параметрів в'язкопружності, таких як змінні за часом модулі Юнга, зсуву та коефіцієнти Пуассона, а апроксимація цих параметрів експоненціальними рядами Проні за допомогою методу найменших квадратів – їх аналітичні залежності від часу при збереженні мінімальної кількості членів рядів Проні.

Аналіз точкових залежностей технічних параметрів в'язкопружності від температури дозволив встановити термореологічну простоту композиційного матеріалу, що розглядався [22]. В результаті апроксимації цих залежностей із застосуванням різних зсувних функцій була визначена найбільш оптимальна з них – зсувна функція Вільямса-Ландела-Феррі [23] – та знайдені її параметри.

Все це дозволило отримати аналітичні залежності в'язкопружних технічних постійних композиційного матеріалу від часу та температури.

Характеристики анізотропії полімерного армованого композиційного матеріалу, що були визначені за допомогою проведеного експериментального дослідження, якісно співпадають із результатами, отриманими авторами за допомогою структурного методу дослідження, заснованого на моделюванні механіки представницького об'єму композиту [24, 25], що підтверджує коректність проведеної серії експериментів.

Таким чином, виконаний експеримент на високотемпературну анізотропну в'язкопружність полімерного армованого композиційного матеріалу дозволив встановити усі параметри, що необхідні для моделювання цього явища при розрахунках механіки твердого тіла, що деформується.

Список літератури:

1. *Справочник по композиционным материалам* / ред. Дж. Любин. – М.: Машиностроение, 1988. – Т. 1. – 448 с.
2. *Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник* / Д. М. Карпинос. – Киев: Наукова думка, 1985. – 588 с.
3. *Кравчук А. С. Механика полимерных и композиционных материалов* / А. С. Кравчук, В. П. Майборода, Ю. С. Уржумцев. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
4. *Капитонов А. М. Физико-механические свойства композиционных материалов. Упругие свойства* / А. М. Капитонов, В. Е. Редькин. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2013. – 532 с.
5. *Побердья Б. Е. Механика композиционных материалов* / Б. Е. Побердья. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 336 с.
6. *Уорд М. Механические свойства твёрдых полимеров* / И. Уорд. – М.: Химия, 1975. – 357 с.
7. *Шен М. Вязкоупругая релаксация в полимерах* / М. Шен. – М.: Мир, 1974. – 270 с.
8. *Кристенсен Р. М. Введение в теорию вязкоупругости* / Р. М. Кристенсен. – М.: Мир, 1974. – 338 с.
9. *Адамов А. А. Методы прикладной вязкоупругости* / А. А. Адамов, В. П. Матвеевко, Н. А. Труфанов и др. – Екатеринбург: УрО РАН, 2003. – 411 с.
10. *Львов Г. І. Аналітичне дослідження контактної поведінки ділянки трубопроводу з в'язкопружною ремонтною накладкою* / Г. І. Львов, В. Г. Мартиненко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: «Динаміка та міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 57. – С. 49-56.
11. *Львов Г. І. Аналіз напружено-деформованого стану трубопроводу з в'язкопружним ремонтним бандажем на різних робочих режимах* / Г. І. Львов, В. Г. Мартиненко // Вісник НТУУ «КПІ». Серія: «Машинобудування». – Київ: НТУУ «КПІ», 2015. – № 73. – С. 22-28.
12. *Львов Г. І. Чисельно-аналітичне дослідження ортотропної в'язкопружності склопластику на прикладі ремонтної накладки магістрального трубопроводу* / Г. І. Львов, В. Г. Мартиненко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: «Динаміка та міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 58. – С. 68-77.
13. *Martynenko V. G. An Original Technique for Modeling of Anisotropic Viscoelasticity of Orthotropic Materials in Finite Element Codes Applied to the Mechanics of Plates and Shells* / V. G. Martynenko // *Mechanics and Mechanical Engineering*. – 2017. – Vol. 21, № 2. – P. 389-413.
14. *Fabrizio M. Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity* / M. Fabrizio, A. Morro // *Society for Industrial Mathematics*, 1992. – 203 p.
15. *Nedjar B. An anisotropic viscoelastic fibre-matrix model at finite strains: Continuum formulation and computational aspects* / B. Nedjar // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2007. – Vol. 196. – P. 1745-1756.
16. *Hwu C. Analysis of defects in viscoelastic solids by a transformed boundary element method* / C. Hwu, Y. C. Chen // *Procedia Engineering*. – 2011. – Vol. 10. – P. 3038-3043.
17. *Bai T. Time-domain finite-difference modeling for attenuative anisotropic media* / T. Bai, I. Tsvankin // *Geophysics*. – 2016. – Vol. 81. – P. 163-176.
18. *Liefeith D. An anisotropic material model for finite rubber viscoelasticity* / D. Liefeith, S. Kolling // *LS-DYNA Adwenderforum*. – Frankenthal, 2007. – P. 25-54.
19. *Sathishkumar T. Glass fiber-reinforced polymer composites - a review* / T. Sathishkumar, S. Satheeshkumar, J. Naveen // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. – 2014. – Vol. 33. – P. 1258-1275.
20. *Stickel J. M. Glass Fiber-Reinforced Composites: From Formulation to Application* / J. M. Stickel, M. Nagarajan // *International Journal of Applied Glass Science*. – 2012. – Vol. 3. – P. 122-136.
21. *ASTM D618-13. Standard Practice for Conditioning Plastics for Testing* / American Society for Testing and Materials, 2013. – 08.01.
22. *Shinozuka M. Thermorheologically simple viscoelastic materials* / M. Shinozuka // *AIAA Journal*. – 1965. – Vol. 3. – P. 375-377.
23. *Williams M. L. The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids* / M. L. Williams, R. F. Landel, J. D. Ferry // *Journal of the American Chemical Society*. – 1955. – Vol. 77. – P. 3701-3706.
24. *Мартиненко В. Г. Чисельна методика визначення анізотропних в'язкопружних властивостей ортогонально армованого композиційного матеріалу* / В. Г. Мартиненко, Г. І. Львов // Вісник НТУ «ХПІ»: серія «Динаміка та міцність машин». – Харків: НТУ «ХПІ», 2016. – № 46. – С. 44-51.
25. *Martynenko V. G. Numerical prediction of temperature dependent anisotropic viscoelastic properties of fiber reinforced composite* / V. G. Martynenko, G. I. Lvov // *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. – 2017. – Vol. 36, № 24. – P. 1790-1801.

УДК 539.432

ТЕОРЕТИЧНА ОЦІНКА ВТОМНОЇ МІЦНОСТІ ЗА НАЯВНОСТІ ГОСТРОГО КОНЦЕНТРАТОРА НАПРУЖЕНЬ

Герасимчук¹ О.М., Герасимчук² О.М.

1 - Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, м. Київ, Україна

2 - Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

Вплив концентрації напружень під час аналізу втомної міцності зразків та елементів конструкцій зазвичай представляється ефективним коефіцієнтом концентрації напружень, K_f , що визначається як

$$K_f = \Delta\sigma_e / \Delta\sigma_{e,k}, \quad (1)$$

де $\Delta\sigma_e$ – границя витривалості гладких зразків, у термінах розмаху напружень циклу; $\Delta\sigma_{e,k}$ – границя витривалості зразків з концентратором. Значення $\Delta\sigma_e$ і $\Delta\sigma_{e,k}$ зазвичай визначаються експериментально, проте багатьма дослідниками свого часу робились спроби визначити K_f за допомогою тих чи інших параметрів.

У праці [1] було запропоновано наступну модель для оцінки границі витривалості, $\sigma_{-1,k}$, зразків з концентратором за симетричного циклу навантаження:

$$\sigma_{-1,k} = \frac{E\sqrt{b}}{K_t} \sqrt{1/l_c + 4,5/\rho}, \quad (2)$$

де K_t – теоретичний коефіцієнт концентрації напружень для концентратора з радіусом ρ у вершині; E – модуль пружності; b – модуль вектора Бюргерса; l_c – критична відстань.

Критична відстань l_c – це відстань від вершини концентратора (в напрямку, перпендикулярному прикладеному нормальному напруженню), на якій розмах локальних напружень досягає рівня границі витривалості гладких зразків під час дії розмаху номінальних напружень, що дорівнює границі витривалості зразків з концентратором.

Формула (2) аналогічна формулі (1), де

$$K_f = K_t / \sqrt{1 + 4,5 \cdot l_c / \rho}, \quad (3)$$

а границя витривалості гладких зразків за симетричного циклу навантаження, $\sigma_{-1,e}$, розраховується наступним чином [1]:

$$\sigma_{-1,e} = E\sqrt{b} / \sqrt{l_c}. \quad (4)$$

Критичну відстань, l_c , можна оцінити за феноменологічною залежністю від розміру зерна, d , як

$$l_c = E^2 b \left(A + B \cdot \arctg \left(\left(E\sqrt{b/(4d)} - A \right) / B \right) \right)^{-2}, \quad (5)$$

де $A = (\sigma_f + \sigma_p) / 2$; $B = (\sigma_p - \sigma_f) / \pi$; $\sigma_f \cong ME [2(1+\nu)]^{-1} \cdot 10^{-3}$ – напруження внутрішнього тертя в кристалічній ґратці; σ_p – границя пропорційності; ν – коефіцієнт Пуассона; M – фактор Тейлора.

Модель (2) добре працює для «тупих» та «мілких» концентраторів, тобто коли $K_t \leq 4$. Натомість для концентраторів іншого типу, «гострих» та «глибоких» ($K_t > 4$), втомна міцність може визначатись пороговим розмахом номінального напруження, $\Delta\sigma_{th}$, за якого від вершини концентратора ініціюється втомна тріщина, що проростає до певного розміру і

припиняє своє подальше поширення внаслідок поступово зростаючого ефекту закриття берегів тріщини позаду її вістря.

У даній праці пропонується модель, що є модифікацією моделі Чапетті [2]. Модель може бути використана для оцінки втомної міцності зразків/елементів конструкцій, які містять глибокі та гострі концентратори напружень або поверхневі дефекти, що можуть бути представлені як початкові тріщини. Рівняння граничної кривої порогових напружень у термінах максимального напруження циклу за симетричного циклу навантаження для концентратора глибиною D пропонується у наступному вигляді:

$$\sigma_{th} = \frac{K_{th,d} + (K_{th,LC} - K_{th,d})(1 - e^{-k(l-d)})}{Y\sqrt{\pi(D+l)}}, \text{ за } l \geq d, \quad (6)$$

де

$$K_{th,d} = \sigma_{-1,e} Y_1 \sqrt{\pi \cdot d}, \quad (7)$$

$$K_{th,LC} = \sigma_{-1,e} Y_2 \sqrt{\pi \cdot l_s} = K_{th,d} (Y_2 / Y_1) \sqrt{l_s / d}, \quad (8)$$

$$k = \frac{K_{th,d}}{l_c (K_{th,LC} - K_{th,d})} = \left[l_c \left(\frac{Y_2}{Y_1} \sqrt{\frac{l_s}{d}} - 1 \right) \right]^{-1}. \quad (9)$$

Враховуючи (4), (7) – (9), рівняння (6) набуває вигляду:

$$\sigma_{th} = E\sqrt{b/l_c} \cdot Y_1 \sqrt{d} \frac{1 + \left(\sqrt{l_s/d} - 1 \right) \left\{ 1 - \exp \left[(d-l) / \left(\left(\sqrt{l_s/d} - 1 \right) l_c \right) \right] \right\}}{Y\sqrt{D+l}}, \text{ за } l \geq d \quad (10)$$

де Y_1 – геометричний фактор для мікро структурно короткої тріщини глибиною в один розмір зерна d , $0,67 \leq Y_1 \leq 0,73$ залежно від M [1]:

$$Y_1 = Y_2 \left(2\sqrt{1/(d/l_s + 1)} - 1 \right), \quad (11)$$

де Y_2 – геометричний фактор для довгої тріщини (ДТ), $Y_2 = 0,73$ [3]; Y – геометричний фактор для концентратора разом з тріщиною, $D+l$. Оскільки відношення $1 \leq Y_2 / Y_1 \leq 1,09$ є несуттєвим для рівняння (10), ним можна знехтувати.

Параметр l_s розраховується за формулою, запропонованою у [3]:

$$l_s = \left(d \cdot 8^2 \cdot \pi (1 + \nu)^2 h \right) / (12 \cdot M^2 b), \quad (12)$$

де h – відстань між сусідніми паралельними площинами ковзання у кристалічній ґратці залежно від того, яка система ковзання активується відповідно до визначеного фактора Тейлора. Як було показано у [3], параметр l_s характеризує глибину поверхневої напівкруглої фізично малої тріщини (ФМТ) під час зміни механізму її розповсюдження в гладких зразках за рівня одновісного напруження розтягу, що перевищує границю витривалості на нескінченно малу величину. З іншого боку, цей параметр характеризує глибину поверхневої напівкруглої ФМТ, на якій досягається максимальний рівень закриття у її вістрі, що відповідає рівню закриття ДТ за рушійної сили, еквівалентної $K_{th,LC}$ (див. формулу (8)).

Для розрахунку за запропонованою моделлю і порівняння з експериментальними результатами було обрано дані праць [4] та [5]. На рис. 1 наведено криві (суцільні лінії), розраховані за рівнянням (10), порівняно з експериментально отриманими у [4] та [5] даними (точки) вимірювань розміру тріщини, l , що утворилась від вершини концентратора і далі не розповсюджується, для декількох рівнів навантаження зразків. Як видно з рис. 1, розраховані криві порогових напружень добре узгоджуються з експериментальними результатами,

підтверджуючи таким чином достовірність запропонованої моделі. Перевагою запропонованої моделі є відсутність потреби проведення довготривалих і трудомістких випробувань на втому та втомну тріщиностійкість для отримання параметрів, необхідних для наповнення моделі. Для розрахунку за моделлю (10) достатньо лише дані про характеристики статичної міцності: E, ν, σ_p , які отримуються з випробувань на короточасний розтяг стандартних зразків з даного матеріалу, та характеристики мікроструктури: d, M, b, h , які визначаються з аналізу мікроструктури вихідного матеріалу.

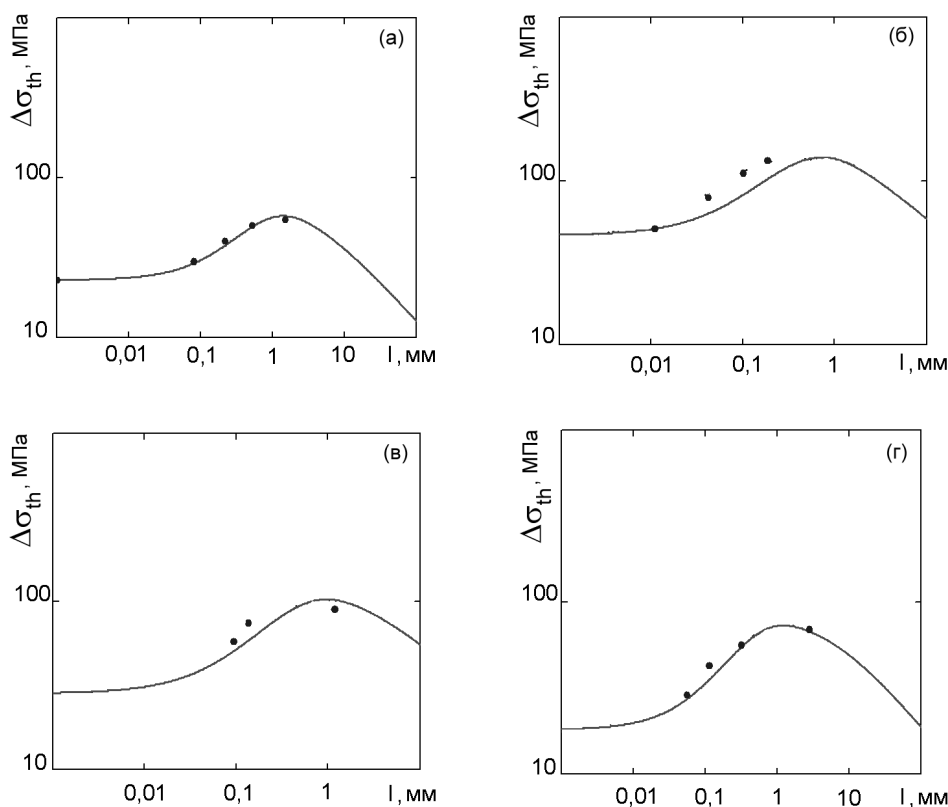


Рис. 1 Порівняння результатів розрахунку з експериментальними даними: (а) – для зразків зі сталі SM41B з крайовим концентратором $D = 3$ мм; (б), (в), (г) – для зразків зі сталі 25CrMo4 з різними розмірами крайового концентратора $D : 0,813$ мм, $2,19$ мм та $5,39$ мм відповідно.

Практичне значення запропонованої моделі полягає у можливості прогнозування розміру втомних тріщин, які не розповсюджуються за певного розмаху напружень, що надзвичайно важливо під час вирішення задачі прогнозування ресурсу елементів конструкцій за концепцією допустимого пошкодження.

Список літератури:

1. Herasymchuk O.M., Kononuchenko O.V., Bondarchuk V.I. Fatigue life calculation for titanium alloys considering the influence of microstructure and manufacturing defects // Int. J. Fatigue, **81**, 257–264 (2015).
2. Chapetti M.D. Fatigue propagation threshold of short cracks under constant amplitude loading // Int. J. Fatigue, **25**, 1319–1326 (2003).
3. Herasymchuk O.M. Microstructurally-dependent model for predicting the kinetics of physically small and long fatigue crack growth // Int. J. Fatigue, **81**, 148–161 (2015).
4. Tanaka K. and Akiniwa Y. Resistance curve method for predicting propagation threshold of short fatigue cracks at notches // Eng. Fract. Mech., **30**, 863–876 (1988).
5. Maierhofer J., Ganser H.P., Pippan R. Modified Kitagawa–Takahashi diagram accounting for finite notch depths // Int. J. Fatigue, **70**, 503–509 (2015).

УДК 539.388.1

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ СТАЛИ 15Х2МФА ($T = 550^{\circ}\text{C}$) В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ И СЛОЖНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Можаровская Т.Н.

НТУУ КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

Аннотация. В докладе рассматриваются закономерности пластического деформирования стали 15Х2МФА ($T = 550^{\circ}\text{C}$) в условиях ползучести и сложного напряженного состояния. Представлено уравнение состояния, описывающее ползучесть стали с учетом влияния вида напряженного состояния на одну из основных характеристик при расчетах на ползучесть - интенсивность деформаций ползучести. Предложены некоторые подходы по оценке ползучести исследуемой стали, которые позволяют сократить число экспериментов и затраты на их проведение, что в дальнейшем даст возможность усовершенствовать методы расчета конструкционных материалов на ползучесть при сложном напряженном состоянии

Ключевые слова: пластическое деформирование стали, ползучесть, сложное напряженное состояние

Большинство реальных элементов конструкций работают в условиях действия широкого спектра факторов, которые существенно влияют на их несущую способность и долговечность.

Таковыми факторами могут быть вид напряженного состояния, высокие температуры и др.

В связи с этим, актуальной проблемой современного машиностроения являются исследования закономерностей деформирования и разрушения конструкционных материалов в условиях ползучести.

В настоящем докладе рассматриваются закономерности механического поведения стали 15Х2МФА ($T = 550^{\circ}\text{C}$) при длительном статическом нагружении в условиях плоского напряженного состояния с точки зрения влияния вида напряженного состояния на одну из основных характеристик ползучести - интенсивность деформаций ползучести ε_{ic} .

Известно, что соотношения между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ползучести принимаются по одной из существующих формул [1, 2]:

$$\varepsilon_{ic} = \Omega(t)\sigma_i^n,$$

$$\varepsilon_{ic} = \left[\frac{Lt}{\beta}\right]^\beta \exp\left[\frac{\beta\sigma_i}{D}\right],$$

где $\Omega(t)$ – функция времени, n , L , β , D – постоянные материала при данной температуре исследований.

Из формул (1) и (2) следует, что интенсивность деформаций ползучести является функцией только интенсивности напряжений и, как результат, кривая ползучести конструкционных материалов при $\sigma_i = const$ и $T = const$ должна быть инвариантной к виду напряженного состояния, а это будет справедливым лишь в том случае, если угол вида девиатора напряжений будет величиной постоянной.

Однако, как показывали многие экспериментальные исследования различных конструкционных материалов [3, 4, 5, 6 и др.] кривые изотермической ползучести при $\sigma_i = const$ зависят от вида напряженного состояния.

В связи с вышеизложенным, была разработана программа исследований стали 15Х2МФА ($T = 550^{\circ}\text{C}$) [7] в упруго-пластической области ($\sigma_i > \sigma_{iT}$) в координатах А. А. Ильюшина [8] применительно к тонкостенным цилиндрическим образцам, которые подвергались одновременному нагружению растяжением и кручением.

При этом вид напряженного состояния характеризовался углом φ :

$$\varphi = \arctg \frac{\sqrt{3}\tau_{z\theta}}{\sigma_{zz}}$$

Обработка экспериментальных данных показала, что кривые ползучести могут быть описаны следующим уравнением состояния:

$$\varepsilon_{ic}(\sigma_i, \varphi, t) = \left[\frac{L(\varphi)t}{\beta(\varphi)} \right]^{\beta(\varphi)} \exp \left[\frac{\beta(\varphi)\sigma_i}{D(\varphi)} \right],$$

где $L(\varphi)$, $\beta(\varphi)$, $D(\varphi)$, - параметры, характеризующие способность материала к пластическому деформированию при ползучести в зависимости от вида напряженного состояния [2, 9], а β при всех значениях φ ($-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) для исследуемой стали 15X2МФА ($T = 550^\circ\text{C}$) оказался величиной постоянной и равной $\beta = 0,43$.

Если ввести безразмерные параметры:

$$\frac{L(\varphi)}{L(0)} = \Phi(\varphi); \quad \frac{D(\varphi)}{D(0)} = \Omega(\varphi)$$

и описать аналитически зависимости $\Phi = f(\varphi)$; $\Omega = f(\varphi)$, уравнение (4) примет вид:

$$\varepsilon_{ic}(\sigma_i, \varphi, t) = \left[\frac{L(0)t}{\beta(0)} \right]^{\beta(0)} \exp \left\{ \frac{\beta(0)\sigma_i}{D(0)} \left[\frac{1}{\frac{D(\pi/2)}{D(0)} + \left[1 - \frac{D(\pi/2)}{D(0)} \right] Z^2(\varphi)} + \frac{D(0)}{\sigma_i} \ln \left\{ \frac{L(\pi/2)}{L(0)} + \left[1 - \frac{L(\pi/2)}{L(0)} \right] Z^2(\varphi) \right\} \right] \right\},$$

где $L(0)$, $L(\pi/2)$, $D(0)$, $D(\pi/2)$, $\beta(0)$ – постоянные материала, определяемые из двух базовых опытов – при растяжении ($\varphi = 0$) и при кручении ($\varphi = \frac{\pi}{2}$), а $Z(\varphi)$ – универсальная функция, характеризующая вид напряженного состояния:

$$Z(\varphi) = \frac{1 + \frac{3}{2}tg^2\varphi}{\sqrt{(1 + tg^2\varphi)^3}}$$

Таким образом, используя уравнение (6) при расчетах конструкционных материалов, работающих в условиях ползучести и сложного напряженного состояния, можно сократить число экспериментов и затраты на их проведение, а в качестве расчетных данных использовать данные, полученные при одноосном растяжении и кручении.

Список літератури:

1. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1975. – 387с.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. – М. : Наука, 1966. -752с.
3. Горев Г. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О построении уравнений ползучести для материалов с различными свойствами на растяжение и сжатие. – Прикл. матем. и техн. физика.- 1979.- №4. - С. 121 – 128.
4. Ермаков В. П., Рабинович А. И. Ползучесть теплопрочного алюминиевого сплава при сложном напряженном состоянии. – Прикл. механика и техн. физика.- 1971.- №2. - С.83-86
5. Можаровский Н. С., Антипов Е. А., Бобырь Н. И., Ползучесть и долговечность материалов при программном нагружении. – Киев : Изд-во Вища школа, 1982. - 130с.
6. Наместников В. С. О ползучести при сложном напряженном состоянии. – В кн: ползучесть и длительная прочность. Новосибирск, изд-во СО АН СССР, 1963, с. 100 – 109.
7. Можаровская Т. Н. Программа и методика исследования ползучести и длительной прочности материалов с учетом вида девиатора напряжений и истории нагружения. –Пробл. прочности. -1984. - №11. – С. 83-98.
8. Ильющин А. А. Пластичность. –М.: Изд-во АН СССР, 1963. -272 с.
9. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. –М. : Наука, 1972. -592 с.

УДК 534.134

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЧАСТОТ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ПІДКРІПЛЕНОЇ ТОНКОСТІННОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ТА ЇЇ АФІННО-ПОДІБНОЇ МОДЕЛІ

Ясній П.В., Пиндус Ю.І, Гудь М.І.

ТНТУ ім. Івана Пулюя, Тернопіль, Україна

Анотація. В роботі виконано порівняння частот власних коливань підкріпленої тонкостінної циліндричної оболонки та її афінно-подібної моделі. В результаті дослідження виявлено, що внаслідок збільшення жорсткості конструкції частоти власних коливань моделі зростають на порядок, у порівнянні з власними частотами повнорозмірного підсиленого циліндра.

Ключові слова: оболонки, ракетобудування, афінно-подібна модель.

Підсилені за допомогою стрингерів та шпангоутів циліндричні оболонки знайшли широке застосування у різноманітних галузях народного господарства, зокрема у ракетобудуванні для виготовлення обтікачів та оболонок ракет носіїв. За звичних умов експлуатації на такі оболонки діють аеродинамічні навантаження від оточуючого газового середовища та двигунів. Крім того, при транспортуванні до місця старту на оболонки діють різноманітні навантаження, особливість яких визначається типом транспортного засобу.

Дослідженням динаміки підсиленних оболонкових елементів присвячені праці [1,2]. Зокрема, в праці [1] визначали лінійні прискорення при морському транспортуванні ракети носія "Зеніт-3SL". Показано, що прискорення мають полігармонічний характер зі змінними в часі частотами і амплітудами, а основний внесок в динамічне навантаження ракети носія вносить низькочастотна качка стартової платформи. Огляд експериментальних методів досліджень наведено в роботах [3,4]. Так, за допомогою методу голографічної інтерферометрії, в роботі [3] досліджено нижній та середній діапазон спектру коливань регулярно підкріплених оболонок.

Метою роботи є порівняльний аналіз частот вимушених коливань підсиленої стрингерами та шпангоутами циліндричної оболонки та її афінно-подібної моделі. Вказана мета визначена необхідністю вирішення задач оцінки напружено-деформованого стану та втомної міцності підсиленних циліндричних оболонок при транспортуванні авіаційним транспортом.

За основу при розробці моделі взято I ступінь ракети-носія, довжина якої становить 6300мм, а діаметр 1800 мм, товщина стінки 1,5 мм [4]. При розробці моделі застосовано афінну подібність – це узагальнений варіант геометричної подібності, при якому допускається нерівність масштабних коефіцієнтів вздовж окремих координат. Довжина такого циліндра становить 1500 мм, діаметр 400 мм. Товщину стінки циліндра 1,5 мм обирали з умов забезпечення необхідної жорсткості. У підсиленій моделі використовували стрингери з рівностороннього кутника 10x10x1,5 мм, які розміщували на внутрішній поверхні оболонки симетрично та з постійним кроком, зберігаючи тотожне відношення між площами підкріплених та вільних ділянок моделі та дійсного об'єкта. Стиковочні шпангоути у вигляді накладок товщиною 1,5 мм та шириною 100 мм наклеювали зсередини на краї оболонки.

Модель оболонки та стрингерів виготовляли з пластин алюмінієвого сплаву Д16АТ з наступними механічними характеристиками: модуль Юнга $E = 7.2 \times 10^5$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$; $\rho = 2,7 \cdot 10^4$ Н/м³.

Для порівняльного аналізу, методом скінчених елементів з використанням програмного забезпечення ANSYS досліджено власні частоти коливань повнорозмірної циліндричної оболонки і модельної циліндричної оболонки. Як помітно з результатів дослідження

(Табл.1.) власні частоти коливань моделі більш як на порядок перевищують власні частоти повнорозмірної циліндричної оболонки.

Таблиця 1

Власні частоти повнорозмірних та масштабних підсилених оболонок з урахуванням власної ваги із наповнювачем та без нього (в Нз)

| № | Власна частота коливань повнорозмірної підкріпленої оболонки | Власна частота коливань підкріпленої моделі оболонки (без наповнювача) |
|----|--|--|
| 1 | 14,2 | 153.7 |
| 2 | 14,2 | 153.7 |
| 3 | 14,9 | 162.1 |
| 4 | 14,9 | 162.1 |
| 5 | 16,5 | - |
| 6 | 16,5 | - |
| 7 | 19,9 | - |
| 8 | 20,2 | - |
| 9 | 20,2 | - |
| 10 | 20,7 | - |
| 11 | 24,9 | - |
| 12 | 24,9 | - |

Висновки.

1. Побудовано скінченно-елементну афінно-подібну модель підкріпленої циліндричної тонкостінної оболонки.
2. Методом скінченних елементів обчислено власні частоти коливань для базової повнорозмірної підсиленої циліндричної оболонки, а також афінно-подібної моделі оболонки. Встановлено, що частоти власних коливань моделі більш як на порядок перевищують власні частоти повнорозмірної циліндричної оболонки.

Список літератури:

1. *В.А. Остапюк*, канд. техн. наук О.Э. Арлекинова *Исследование результатов экспериментального определения нагружения ракеты-носителя при морской транспортировке на стартовой платформе // Ракетная техника и вооружение. Научно-технический сборник ГП КБЮ. – 2010. – Вып. 2. – С. 71 – 84.*
2. *Ясній, П.В. Аналіз частот і форм власних коливань підсилених циліндричних оболонок*(текст)/ П.В. Ясній , Ю.І. Пиндус , М.І. Гудь.// Вісник Тернопільського національного технічного університету.-2016.-№3.-С.7-15.
3. *Шевченко В.П., Власов О.И., Каиров В.А. Экспериментальное исследование собственных колебаний конструктивно неоднородных цилиндрических оболочек // Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування. – 2013.– Т.2, №68. – С.122-127.*
4. *Заруцкий В.А. О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек // Прикл. механика. – 2001. – Т.37, № 8. – С.38-67.*

УДК 629.1.01

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ПРО ВЗАЄМОДІЮ ДЕФОРМІВНОГО ПРИВІДНОГО КОЛЕСА З ДЕФОРМІВНОЮ ОСНОВОЮ

В.П. Ковбаса

ВНАУ, м. Вінниця, Україна

***Анотація.** В публікації розглянуто теоретичні передумови аналітичного розв'язання контактної задачі взаємодії привідного деформівного колеса, що навантажене силою ваги та прикладеним до нього крутним моментом, із деформівною основою. Задача розв'язувалась у плоскій постановці з використанням методів теорії пружності. Для визначення функції розподілу сил за довжиною контакту застосовані методи теоретичної механіки та математичного аналізу. Для визначення абсолютних деформацій поверхонь колеса та основи використовувались бігармонічні потенціальні функції. В процесі розв'язання визначено розподіл сил за довжиною зони контакту, границі зони та компоненти абсолютних деформацій поверхонь колеса та основи. Функціональні залежності розподілу сил та розміри зони контакту дають можливість визначити аналітично функцію коефіцієнта опору перекочування, а наявність функціональних залежностей компонент абсолютних деформацій поверхонь колеса та основи – зони буксування, зчеплення та ковзання. Отримані результати дають підстави для поглиблення досліджень взаємодії пневматичних коліс машин різних геометричних форм та розмірів з різними за механічними властивостями основами.*

***Ключові слова:** деформівне колесо; деформівна основа; зона контакту; абсолютні деформації; бігармонічні потенціальні функції*

Аналіз стану досліджень. При проектуванні та експлуатації машин із колісними рушійними виникають задачі про забезпечення несучої здатності основи, тягово-зчіпних характеристик забезпечення мінімальних витрат енергії на перекочування та інші. Всі ці задачі пов'язані з умовами контакту поверхні деформівного колеса з поверхнею основи. Слід зазначити, що розв'язанню цих задач у загальному вигляді приділяється недостатньо уваги. Існують класичні розв'язки взаємодії колеса з деформівною основою [1, 2]. Але до недоліків таких розв'язків слід віднести відсутність в постановці задачі прикладеної рушійної сили та аналізу деформацій в зоні контакту при прикладанні зосереджених сил: це не дозволяє визначити вплив більшості факторів, які впливають на зміни деформацій на поверхнях колеса та основи. Існують також методи досліджень взаємодії колеса з основою, які ґрунтуються на чисто експериментальних дослідженнях [3]. Але слід зазначити, що недоліком цих методів є відсутність спільності для широкого спектру змін параметрів, властивостей та режимів взаємодії. Разом із тим, у зв'язку з поширенням прикладних програм чисельного моделювання процесів на основі використання методів скінченних елементів широкого поширення набули розв'язки конкретних задач із конкретними сталими навантаженнями та механічними властивостями колеса та основи. Ці розв'язки отримуються для конкретних крайових умов [4], що також обмежує їх спільність.

Мета і задачі досліджень. Мета досліджень полягала у визначенні розподілу тиску в зоні контакту деформівне колесо- деформівне середовище та встановлення границь зони контакту при взаємодії деформівного привідного колеса з деформівною основою.

Задачами досліджень були: визначення розподілу тиску по поверхні контакту та встановлення границь зони контакту на основі розв'язання плоскої задачі з квазілінійним зв'язком напружень зі швидкостями деформацій.

В результаті розв'язку цих задач були визначені компоненти абсолютних деформацій колеса та основи в межах границь зони контакту.

Шлях розв'язання задачі та результати досліджень. У загальному вигляді формалізація задачі була такою: деформівне колесо радіусу r_k зі сталими деформівними властивостями (модулем пружності та коефіцієнтом бічного розширення) діє на деформівну основу в площині контакту xz із вертикальною координатою $y=0$, яка має також сталі

деформівні властивості. При цьому до колеса прикладена вертикальна масова сила та крутний момент. Для формалізації взаємодії введені координати середовища $x, z, y = 0$ та координати колеса ξ, η . Загальна схема наведена на рис. 1, де прийняті такі позначення: $P = m g$ – сила ваги, P_ξ – розподілена по кривій контакту сила ваги, $P_{m\xi}$ – розподілена по поверхні контакту сила опору перекошуванню (вважається поперечна складова за $y = 0$), M – крутний момент, прикладений до колеса, V_m – швидкість (напрямок) переміщення колеса, r – радіус колеса, T – приведена до площини контакту дотична сила (рушійна сила), T_ξ – приведена до площини контакту розподілена дотична сила (розподілена рушійна сила), h – сумарна вертикальна деформація колеса та основи, a, a_1 – передня та задня границі зони контакту, відповідно.

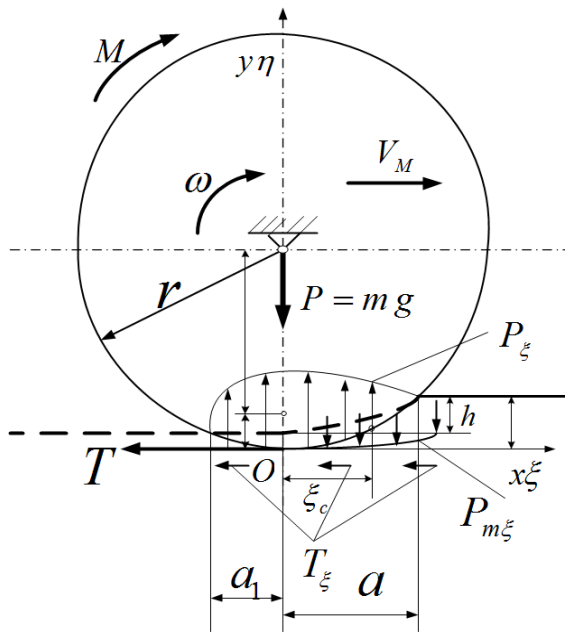


Рис. 1- Схема взаємодії деформівного привідного колеса з деформівною основою

За умовами задачі на поверхні контакту відомі зосереджені сили. Виходячи з такої постановки, задача повинна розв'язуватись у переміщеннях (у межах лінійної теорії пружності). Для розв'язання задачі використовуються рівняння Ляме з урахуванням умов на поверхні контакту. Разом із тим, за умови забезпечення форми фізичних рівнянь, що приводить рівняння типу Ляме до еліптичної форми, може розв'язуватися й задача пружнов'язкості (за умови зведення рівнянь до форми, яка виключає змінну часу деформування шляхом заміни його функцією розповсюдження напружень для конкретного середовища). У цьому випадку постає задача про знаходження швидкостей переміщень шляхом розв'язання рівнянь Ляме з урахуванням умов на границі зони контакту. Для плоскої постановки такої задачі відоме рішення [5, 6] у вигляді:

$$\begin{aligned}
 u_p[x, 0] &= -M_p \int_{a_1}^a \left((-T_\xi + \nu_p (-P_\xi + P_{m\xi})) \frac{B t}{t^2 + (x+t-\xi)^2} \right) d\xi; \\
 v_p[x, 0] &= M_p \int_{a_1}^a \left((-P_\xi + P_{m\xi} + \nu_p T_\xi) \frac{B t}{t^2 + (x+t-\xi)^2} \right) d\xi; \\
 u_k[x, 0] &= -M_k \int_{a_1}^a \left((T_\xi + \nu_k (P_\xi - P_{m\xi})) \frac{B t}{t^2 + (x+t-\xi)^2} \right) d\xi; \\
 v_k[x, 0] &= M_k \int_{a_1}^a \left((P_\xi - P_{m\xi} + \nu_k T_\xi) \frac{B t}{t^2 + (x+t-\xi)^2} \right) d\xi, \\
 M_p &= \frac{e^{-\frac{G_p t}{\mu_p}} (-1 + e^{\mu_p})}{6G_p (1 + \nu_p)}, M_k = \frac{e^{-\frac{G_k t}{\mu_k}} (-1 + e^{\mu_k})}{6G_k (1 + \nu_k)},
 \end{aligned} \tag{3}$$

де $u_p[x,0], v_p[x,0], u_k[x,0], v_k[x,0]$ – переміщення в напрямку поздовжньої та вертикальної осей координат поверхонь контактуючих тіл у зоні контакту для основи та колеса $\{a_1, a\}$, відповідно; $T_\xi, P_\xi, P_{m\xi}$ – розподілені сили у зоні контакту, відповідно: дотична; вертикальна від дії сили ваги, що приведена до колеса; та сила вертикальної реакції опору перекочування, що утворюється в зоні контакту $\{0, a\}$ та спричинена моментом опору коченню, M_k, M_p – деформівні властивості колеса та матеріалу основи, де $G_p, G_k, \mu_p, \mu_k, \nu_p, \nu_k$ – модулі пружності, в'язкості зсувних деформацій та коефіцієнти бічного розширення для основи та колеса відповідно.

До рівняння (1) входять складові розподілених сил по довжині зони контакту, що підлягають визначенню з умов задачі.

У першому наближенні, крива, по якій розподілені сили за довжиною контакту, може бути представлена на відрізку $a_1 - a$ залежністю $\eta = r - \sqrt{r^2 - \xi^2}$, але слід відзначити, що в подальшому інтегруванні виразів (1) такий вигляд кривої може призвести до певних ускладнень. Тому шляхом розкладання в ряд Маклорана цього виразу можна прийти до вигляду кривої $\eta_n = \xi^2/2r$. При цьому при змінах ξ до $0.2r$ обидві криві, а також їхні похідні та інтегральні функції в достатній мірі узгоджуються. Аналогічне представлення кривої зони контакту наведено в дослідженнях О. Ю. Ішлінського [1].

Не вдаючись у подробиці отримання виразів складових зосереджених сил, що прикладені до колеса, можна отримати розподілення по кривій контакту складових сил із використанням криволінійних інтегралів. Ураховуючи те, що сили розподілені по кривій, можна скласти вирази, де зліва стоїть диференціальний вираз сумарної зосередженої сили P , що розподілена по прямій (за довжиною відрізка контакту $\{a_1; a\}$), а справа – аналогічний вираз для розподіленої по кривій сили P_ξ :

$$v_p[x,0] \frac{d}{d\xi} \left(\int \frac{P}{(a-a_1)} d\xi \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\int \left(P_\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{2r} \right) \right)^2} \right) d\xi \right), \text{ звідки } P_\xi = \frac{P}{(a-a_1) \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{r^2}}}. \quad (2.a)$$

Аналогічно визначаються інші складові розподілених сил (дотичної T_ξ та сили опору перекочуванню $P_{m\xi}$):

$$\frac{d}{d\xi} \left(\int \frac{M}{r} d\xi \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\int T_\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\xi^2}{2r} \right) \right)^2} d\xi \right), \text{ звідки } T_\xi = \frac{M r \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{r^2}}}{(a-a_1)(r^2 + \xi^2)},$$

$$\frac{d}{d\xi} \left(\int (M / (r/a)) d\xi \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\int (-P_{m\xi} (\xi - a)^2) d\xi \right), \text{ звідки } P_{m\xi} = -\frac{aM}{r(a-\xi)^2}. \quad (2.б)$$

Ці розподіли сил при підстановці в рівняння (1) і їхньому подальшому інтегруванні в загальному вигляді викликають непереборні труднощі. Тому їх можна розкласти в ряди Маклорана, й внаслідок чого вони набудуть вигляду:

$$P_n = \frac{g m (2r^2 - \xi^2)}{2(a-a_1)r^2}; \quad T_n = \frac{M (2r^2 - \xi^2)}{2(a-a_1)r^3}; \quad P_{mn} = -\frac{M (a^2 + 2a\xi + 3\xi^2)}{a^3 r}. \quad (3)$$

Про збіжність виразів (2.a) та (2.б) можна зробити висновок із аналізу їхніх графіків (рис.2).

Підстановка виразів (3) у рівняння (1) та їхнє подальше інтегрування дозволяють отримати вирази абсолютних переміщень двох тіл у зоні контакту $\{a_1; a\}$. З використанням

виразів (1) для вертикальних переміщень поверхні колеса $v_k[x,0]$ та поверхні основи в межах зони контакту можна визначити границі цієї зони. Умови визначення передньої та задньої границь можуть бути такими: на задній границі зони контакту деформація поверхні колеса (виходячи з того, що $\eta_n = \xi^2/2r$) дорівнює $v_k|_{\xi=a_1} = a_1^2/2r$. В передній частині зони контакту $(v_k - v_p)|_{\xi=a} = 0$. Виходячи з цих умов, границі зони контакту будуть визначені з системи двох рівнянь і становитимуть:

$$a_1 = -\sqrt{6} \sqrt{g M_k m v_k + \frac{M_k M v_k}{r}} / \sqrt{\frac{3r^2 + g M_k m r v_k + M_k M v_k}{r^3}};$$

$$a = \frac{\sqrt{2} \sqrt{6 M_k M r^2 v_{1k} + g M_k m r^3 v_k + 6 M M_p r^2 v_p + g m M_p r^3 v_p + M_k M r^2 v_k - M M_p r^2 v_p}}{\sqrt{g M_k m r v_k + g m M_p r v_p + M_k M v_k - M M_p v_p}}$$

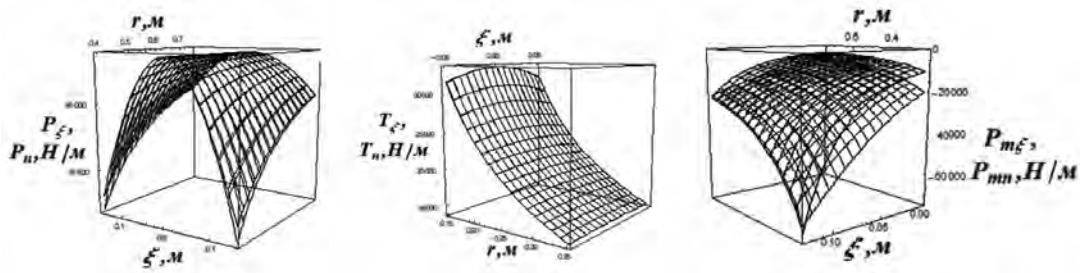


Рис. 2 Графіки залежностей розподілених сил (2.a) і (2.б) та розкладених в ряди Маклорана (3)

Висновки. В результаті проведених досліджень отримані аналітичні залежності розподілу сил у зоні контакту деформівного колеса з деформівною основою, визначені границі зони контакту та компоненти абсолютних деформацій поверхні колеса та поверхні основи.

Отримані залежності дають підстави для проведення більш глибоких досліджень взаємодії деформівного колеса з деформівною поверхнею з урахуванням розгорнутих показників деформівних властивостей колеса та поверхні основи в просторовій постановці.

Результати подальших досліджень дадуть можливість оптимізації геометричних параметрів та механічних властивостей деформівних коліс із метою забезпечення мінімуму сил опору перекочуванню колеса, забезпечення максимального тягового зчеплення та мінімуму ковзання (буксування) коліс для різних опорних поверхонь.

Список літератури:

1. Ишлинский, А.Ю. О качении жестких и пневматических колес по деформируемому грунту. Прикладные задачи механики: Кн. 1 / А.Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1986. – С. 293-314.
2. Золотаревская, Д.И. Основы теории и методы расчета уплотняющего воздействия на почву колесных движителей мобильной сельскохозяйственной техники: дисс.... доктора техн. наук: 05.20.01. / Д.И. Золотаревская. – Москва, – 1997. – 432 с.
3. Shahgholi, Gholamhossein.. Measuring soil compaction and soil behavior under the tractor tire using strain transducer / Gholamhossein Shahgholi, Mohammadreza Abuali. – Journal of Terramechanics. –2015. – V. 59. – PP. 19-25.
4. Recuero, Antonio. A high-fidelity approach for vehicle mobility simulation: Nonlinear finite element tires operating on granular material / Antonio Recuero, Radu Serban, Bryan Peterson, Hiroyuki Sugiyama, Paramsothy Jayakumar, Dan Negrut. – Journal of Terramechanics. –2017. – V. 72. – PP. 39-54.
5. Александров, В.М. Введение в механику контактных взаимодействий / В.М. Александров, М. И. Чебаков. – Москва, Ростов-на-Дону, 2007. – 114 с.
6. Попов, В.Л. Механика контактного взаимодействия и физика трения / В.Л. Попов. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 352 с.

УДК 539.3:624.016

ПРИРОДНА СИСТЕМА КООРДИНАТ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНИХ КОМПОЗИТНИХ БРУСІВ ІЗ НЕЗМІННИМИ ЛІНІЙНИМИ РОЗМІРАМИ ПОПЕРЕЧНИХ ПЕРЕРІЗІВ

Ковальчук С.Б., Горик О.В.

Полтавська державна аграрна академія, м. Полтава, Україна

Анотація: У сучасних конструкціях різного призначення актуальним стає застосування елементів неоднорідної будови. Однак аналітичні теорії деформування для композитних брусів, особливо із криволінійною віссю, розвинуті слабо, що додатково перешкоджає запровадженню композитів у практику проектування. Для аналітичного моделювання деформацій криволінійних композитних брусів зручним є застосування природної системи координат, у якій геометрія поверхонь, структурна будова та граничні умови бруса мають найбільш простий аналітичний опис. У даній роботі розглянуто особливості аналітичного моделювання будови криволінійних композитних брусів, що мають незмінні лінійні розміри поперечних перерізів. Встановлено, що для таких брусів природна система координат, має бути побудована на сімействі еквідистант криволінійної осі та ортогональному їм сімействі прямих. Досліджено побудову такої системи координат із різними способами параметризації вихідних сімейств кривих.

Ключові слова: композит, брус, криволінійна вісь, деформація, моделювання

У сучасних машинобудівних та будівельних конструкціях все більш актуальним стає застосування композитних матеріалів. В той же час значною перешкодою запровадження таких матеріалів у конструкціях є слабкий рівень розвитку аналітичних теорій деформування композитних елементів. Меншою мірою це стосується композитних оболонок та пластин, більшою – композитних брусів.

Окремі види деформування для композитних брусів із прямою віссю досить добре вивчені [0-0]. Однак для криволінійних композитних брусів і кілець, зустрічаються тільки розв'язки окремих задач для елементів із круговою віссю, наприклад [0-0]. Відповідно розвиток фундаментальних та прикладних теорій деформування композитних криволінійних брусів, є актуальним з наукової і практичної точки зору.

Для композитного бруса із криволінійною плоскою віссю довільної форми у природній системі координат [0] авторами отримані рівняння теорії пружності [0] та залежності для внутрішніх силових факторів [0]. Дані рівняння та залежності теоретично дозволяють розв'язувати задачі визначення напружено-деформованого стану (НДС) криволінійних брусів довільної форми осі. Однак практична реалізація отриманих розв'язків буде обмежена випадками відомих криволінійних ортогональних систем координат – круговою, еліптичною, параболічною та ін. Окрім обмеженого переліку, усі названі системи координат, за виключенням кругової, не дозволяють описати криволінійний композитний брус із сталими вздовж осі лінійними розмірами поперечного перерізу і окремих його фаз.

Отримані у [0] та [0] співвідношення і рівняння для свого застосування потребують не повного аналітичного описання сімейств координатних поверхонь, а лише їх окремих параметрів, таких як коефіцієнти Ламе L_ξ та L_η , відношення $L_\xi/L_\eta = \lambda$, функція $\alpha(\eta, \xi)$ – кута нахилу дотичних до сімейства координатних кривих f_η (рис. 1, а) або її тангенс $\kappa = \text{tg}(\alpha)$ [0]. Тому можна використати отримані рівняння визначивши тільки коефіцієнти L_ξ і L_η та залежність для функції кута α , що можна зробити і без побудови самої системи координат.

У презентованому дослідженні була поставлена задача формальної побудови та отримання необхідних характеристик циліндричної криволінійної ортогональної системи координат, яка дозволяє описати криволінійний композитний брус із довільною плоскою

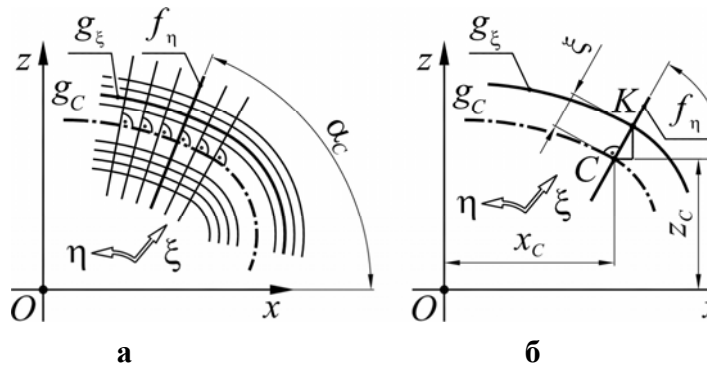


Рис. 1 – Сімейства координатних кривих для бруса із незмінними розмірами поперечних перерізів

віссю та сталими вздовж осі жорсткості лінійними розмірами поперечних перерізів.

Для побудови такої системи координат розглянуто ділянку композитного бруса, що не має самоперетинів. Вісь жорсткості бруса g_C належить площині xOz (рис. 1, а) допоміжної прямокутної системи координат xz і є кусково-гладкою кривою:

$$g_C(x, z) = \varphi(x) - z = 0, \text{ або } g_C(x, z) = \{x = \varphi_x(t), z = \varphi_z(t)\}, \quad (1)$$

де t – параметр кривої g_C .

У випадку коли поперечні лінійні розміри фаз композитного бруса та їх розташування вздовж осі g_C є незмінними, то проекція g_ξ кожного поздовжнього волокна на площину xOz буде кривою рівновіддаленою (паралельною) осі g_C (рис. 1, а). Якщо відстань між точками C і K , що лежать на перетині кривих g_C і g_ξ із спільною нормаллю f_η (рис. 1, б), дорівнює ξ , то їх координати будуть пов'язані співвідношеннями:

$$x_K = x_C + \xi \cos \alpha_C, \quad z_K = z_C + \xi \sin \alpha_C. \quad (2)$$

Кут α_C та координати x_C і z_C однозначно визначаються рівняннями (1), тому (2) описує однопараметричне сімейство кривих g_ξ паралельних криволінійній осі g_C , або її еквідистант, причому $g_C = g_\xi|_{\xi=0}$. Використовуючи методику наведену у [0], по відомому сімейству g_ξ , можна побудувати ортогональне сімейство f_η , що є необхідним кроком для побудови природної криволінійної системи координат $\eta\xi y$. Однак, у розглядуваному випадку, очевидно, що сімейство f_η буде складатись із сімейства прямих, перпендикулярних до осі g_C (рис. 1, а)

$$f_\eta = z - (x - x_C) \operatorname{tg} \alpha_C - z_C = 0. \quad (3)$$

Для його побудови необхідно тільки визначитись із тим, який параметр прямої (3) буде виступати у якості параметра η сімейства f_η .

Було досліджено три випадки параметризації сімейства f_η : за координатою – $x_C = \eta$ (рис. 2 а), за кутом – $\alpha_C = \eta$ (рис. 2 б) і за параметром t – $t = \eta$. Отримані теоретичні результати показали, що коефіцієнти Ламе L_ξ і L_η , їх відношення $L_\xi/L_\eta = \lambda$ та кут α нахилу нормалей до кривих сімейства g_ξ , які входять до рівнянь теорії пружності та співвідношень для внутрішніх силових факторів у природній криволінійній системі координат, матимуть найбільш простий вигляд у випадку параметризації за кутом α_C (рис. 2 б)

$$f_\eta = z - (x - x_C(\eta)) \operatorname{tg} \eta - \varphi(x_C) = 0. \quad (4)$$

Водночас такий тип параметризації потребує розбиття кривої g_C на ділянки без точок перегину, оскільки в іншому випадку одному параметру η відповідатимуть декілька прямих сімейства f_η . Також за такого типу параметризації неможливо розглядати прямолінійні ділянки бруса.

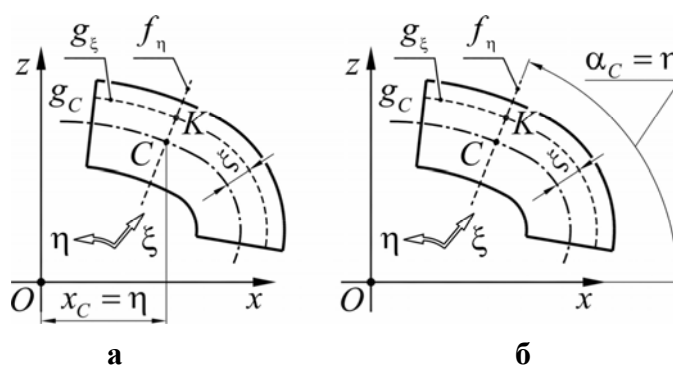


Рис. 2 – Варіанти параметризації сімейства прямих f_η

Параметризація за координатою x_C (рис. 2, а):

$$f_\eta = z - (x - \eta) \operatorname{tg} \alpha_C - \varphi(\eta) = 0, \quad (5)$$

призводить до більш громіздких залежностей і потребує розбиття базової кривої g_C на ділянки у межах яких координата x не повинна мати повторів, тобто координата η має монотонно зростати або спадати. Крім того у криволінійній системі координат із даним типом параметризації не можна описати ділянки бруса на яких крива g_C паралельна осі Oz .

Параметризація за параметром t кривої g_C :

$$f_\eta = z - (x - \varphi_x(\eta)) \operatorname{tg} \alpha_C - \varphi_z(\eta) = 0, \quad (6)$$

володіє перевагами над розглянутими вище випадками, оскільки не вимагає розбиття базової кривої на ділянки. Однак за такого типу параметризації ускладнюється аналітичний запис характеристик системи координат.

Теоретичні результати даного дослідження дозволяють розширити застосування рівнянь, отриманих у [0], та співвідношень, отриманих у [0], на випадок композитного криволінійного бруса із незмінними розмірами поперечних перерізів по довжині і зняти практичне обмеження, стосовно форми його осі.

Список літератури:

1. Горик О.В. Механіка деформування композитних брусів / О.В. Горик, В.Г. Піскунов, В.М. Чередніков. – Полтава-Київ: АСМІ, 2008. – 402с.
2. Goryk A.V. Elasticity theory solution of the problem on plane bending of a narrow layered cantilever bar by loads at its end / A.V. Goryk, S.B. Kovalchuk // Mechanics of Composite Materials. – 2018. – Vol. 54, No. 2. – P. 179-190.
3. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708с.
4. Лехницький С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницький. – М.: Наука, 1977. – 416с.
5. Tolf G. Stresses in a Cerved Laminated Beam / G. Tolf // Fiber Sci. Technol. – 1983. – Vol.19, No.4. – P.243-267.
6. Ko W.L. Multilayer Theory for delamination Analysis of a Composite Curved Bar Subjected to End Forces and End Moments / W.L. Ko, R.H. Jackson Multilayer // Composite Structures 5. – Springer, Dordrecht, 1989. – P.173-198.
7. Ковальчук С.Б. Природна криволінійна циліндрична система координат для стержнів із плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник ОДАБА. – 2017. – Вип. №68. – С.31-38.
8. Ковальчук С.Б. Теоретичні передумови аналітичного моделювання згину композитних брусів із криволінійною плоскою віссю / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Матер. XVIII МНТК «Прогрес. техн., технол. та інж. освіта». – К.: КПІ, 2017. – С.52-54.
9. Ковальчук С.Б. Інтегральні та диференціальні співвідношення для внутрішніх силових факторів при згині бруса з криволінійною плоскою віссю довільної форми / С.Б. Ковальчук, О.В. Горик // Вісник ОДАБА. – 2018. – Вип. №70. – С.40-48.

УДК 620.171.3:616.71-001.5

ДЕФОРМУВАННЯ ЗАСОБІВ ФІКСАЦІЇ ПЕРЕЛОМІВ КІНЦІВОК ПІД ДІЄЮ ФІЗІОЛОГІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Димань М.М.

КПІ ім. Ігоря Сікорського», м. Київ, Україна

Анотація. Виміряні деформаційні характеристики систем «ушкоджена кістка - засіб фіксації перелому» при дії осьового стискання, поперечного згину і кручення, у тому числі в циклічних режимах. Розглянуто найбільш поширені засоби фіксації переломів та вибрані оптимальні з точки зору функціональної надійності способи остеосинтезу відламків. За результатами досліджень проведено порівняння засобів фіксації переломів різних конструкцій за жорсткістю і деформаційною стабільністю як при дії одноразових короточасних навантажень, так і при тривалих циклічних навантаженнях.

Ключові слова: біомеханіка, опорно-руховий апарат, засоби фіксації переломів, остеосинтез, зміщення уламків, жорсткість та міцність фіксації, циклічні навантаження.

Засоби фіксації переломів вважають надійними, коли вони з мінімальною додатковою травмою м'яких і кісткових тканин зберігають нерухомість перелому і уламків, забезпечують опороздатність пошкодженої кінцівки протягом всього періоду лікування. При наявності змінних напружень руйнування матеріалу відбувається при напруженнях значно менших, ніж граничні напруження при одноразовому статичному навантаженні. Інколи виникають ситуації, при яких сам засіб фіксації не витримує тривалого динамічного навантаження, або опороздатність кістки в місці контакту з фіксуючими елементами (шпиці, стрижні, гвинти) нижче ніж прикладені навантаження. А отже, для стабільного остеосинтезу необхідно знати величину, місце прикладання, напрямок дії сил, що намагаються змістити фрагменти, момент сил. [1-3]

Основною метою дослідження було:

1) розробка методики та експериментальне вивчення закономірностей розвитку деформаційних характеристик засобів фіксації переломів різних конструкцій;

2) визначення характеристик жорсткості, встановлення оптимальних типів, форм та розмірів засобів фіксації переломів в залежності від локалізації та типу перелому.

Об'єкти та методи досліджень. Для експериментального дослідження використовували кістки без патології опорно-рухового апарату. Переломи фіксували різними загальноприйнятими хірургічними способами. Типи досліджених кісток із засобами фіксації переломів зображені на рис. 1.

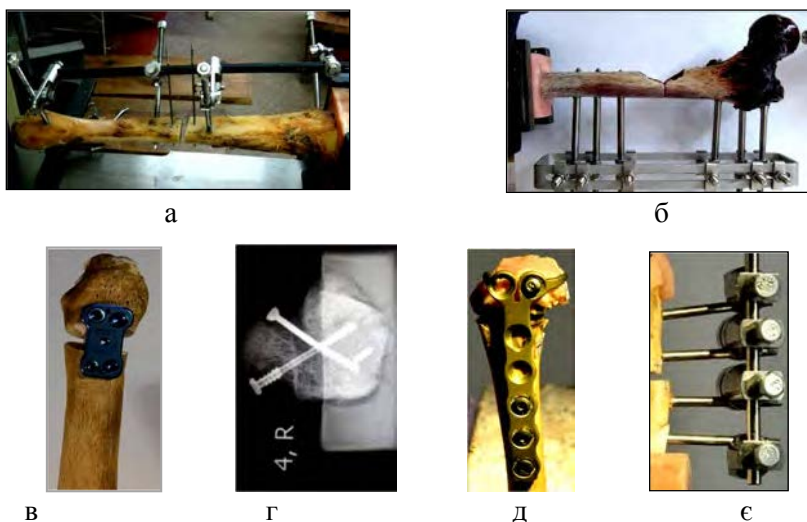


Рис. 1 - Засоби остеосинтезу переломів кісток: кінцівок: а, б, є - стрижневі апарати зовнішньої фіксації; в, д - накісткові пластини; г - гвинти та спиці

Експерименти виконували з використанням універсальних випробувальних машин серії TIRA-test. Для закріплення досліджуваних препаратів на робочому столі випробувальної машини використовували пластмасові опорні головки [4]. Вимірювання загальної деформації системи проводили датчиком переміщень випробувальної машини. Для вимірювання зміщень окремих точок об'єктів, зокрема, взаємних зміщення частин перелому застосували цифрову фото- та відео зйомку [4].

Загальна блок-схема системи представлена на рис. 2, де позначено: 1 - робочий стіл випробувальної машини з об'єктом досліджень; 2 - механізм переміщення; 3 - двигун з регульованою швидкістю обертання; 4 - блок керування двигуном; 5 - динамометр; 6 - перетворювач сигналу; 7 - вимірювач переміщення; 8 - табло з індикацією навантаження та переміщення; 9 - пристрій для друкування діаграм деформування; 10 - комп'ютер для реєстрації процесів; 11 - цифрова фотокамера; 12 - відеокамера; 13 - комп'ютер для обробки цифрових зображень.

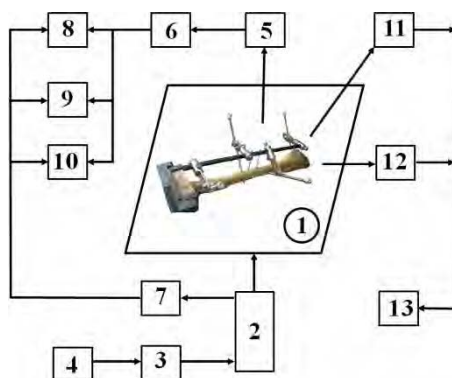


Рис. 2 - Блок-схема системи для дослідження біомеханічних характеристик систем остеосинтезу кінцівок

Режими випробування були максимально наближені до реальних режимів фізіологічних навантажень: досліджувалися дії стискаючих, згинальних та ротаційних навантажень, що діють на кістку; окрім статичних випробувань досліджені дії циклічного навантаження (імітація ходьби) [4-6].

Здійснювали цикли «навантаження - розвантаження» препаратів в інтервалі між двома заданими значеннями сили при максимальній кількості циклів від 50 до 1000. Запис значень деформацій препаратів проводили на кожному циклі з 1 по 10-й і далі на кожному 10-му циклі. Швидкість деформування складала від 2.5 до 25 мм / хв; час витримки зразків при P_{max} та P_{min} від 1 до 5 с; навантаження $P_{max} = 100 \dots 1000$ Н. Конкретні значення характеристик циклу встановлювали в залежності від жорсткостей досліджуваних об'єктів.

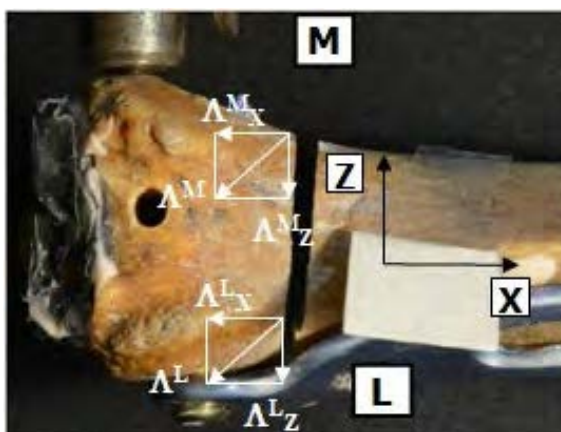


Рис. 3 - Позначення точок перелому та напрями координатних осей відносно перелому при згинанні зразка великогомілкової кістки

Виміряли та розраховували такі характеристики засобів фіксації переломів: Δ та Λ – загальна деформація системи остеосинтезу та взаємне зміщення двох суміжних точок перелому відповідно; $C = P / \Delta$ - жорсткість системи; $\delta = \Delta / P$ - приведена деформація системи; $\lambda = \Lambda / P$ - приведені зміщення точок перелому; $\Delta_{z, 1}$ та $\Lambda_{z, 1}$ – незворотна (затримана) деформація кістки та незворотне (затримане) зміщення двох суміжних точок перелому після одноразової зміни навантаження відповідно; $\Delta_{z, N}$ та $\Lambda_{z, N}$ – незворотна деформація кістки та незворотне зміщення двох суміжних точок перелому після N циклів навантаження відповідно.

При визначенні навантажень, що не заважають розвитку процесів регенерації кісткової тканини у місці перелому, використовували такі деформаційні критерії [7,8]: допустиме лінійне переміщення $[\Lambda] = 1$ мм, допустимий кут повороту $[\Gamma] = 3^\circ$. Умова жорсткості за допустимим переміщенням при дії зовнішньої сили P: $\Lambda_{\max} = \lambda \cdot P \leq [\Lambda]$. В цьому випадку допустиме навантаження $[P] = [\Lambda] / \lambda$. Умова жорсткості за максимальним кутом повороту перерізу

$\Gamma_{\max} = \gamma_{xz} \cdot P \leq [\Gamma]$, а допустиме осьове навантаження $[P] = [\Gamma] / \gamma_{xz}$. З двох одержаних значень $[P]$ вибирали менше навантаження і використовували його як допустиме. Аналогічні розрахунки проведено при випробуваннях на згин та кручення. У цих випадках замість поздовжнього навантаження використовували значення моментів сил, що викликають згин або кручення.

На рис. 4 порівняні руйнівні поздовжні навантаження систем «ВГК з переломом - фіксуєча пластина» та допустимі навантаження, розраховані за вищезазначеними деформаційними критеріями.

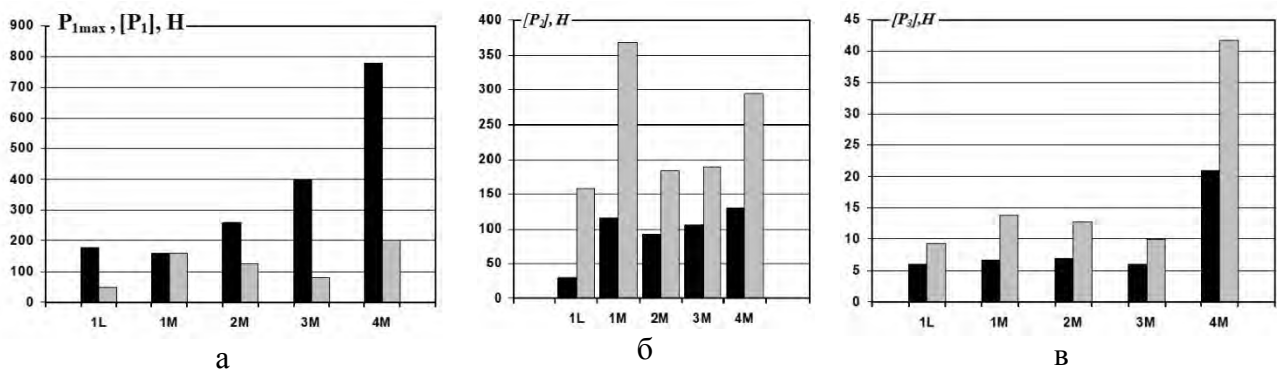


Рис. 4 - Руйнівні (□) та допустимі (■) навантаження системи «ВГК - пластина» при стисканні(а), згинанні (б) та крученні (в)

Як видно з рис. 4, використання деформаційного критерію при стисканні для пластини 1М не є обґрунтованим з точки зору міцності системи, оскільки руйнівне і допустиме навантаження мають близькі значення. Враховуючи, що границя пропорційності системи з пластиною 1М не перевищує 130 Н, використання її при більших навантаженнях небезпечно.

Проведено комп'ютерне моделювання біомеханічних систем «фіксатор-кістка». Геометричні моделі кісток відтворені за даними комп'ютерної томографії здорового пацієнта. Константи для кортикального та губчастого шарів отримані за допомогою натурних експериментів. На основі створених комп'ютерних моделей біомеханічних систем «фіксатор-кістка» проведено дослідження напружено-деформованого стану та визначені максимальні величини зусиль на стиск, згин та максимальні крутні моменти при умові не перевищення переміщень більше, ніж в 1.0мм між кістковими відламками.

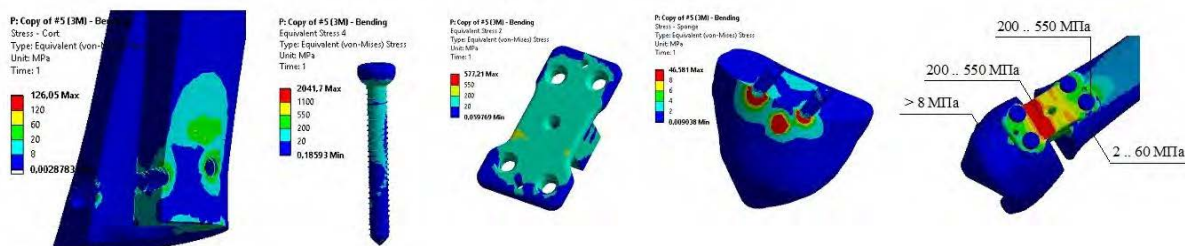


Рис. 5 Розподіл еквівалентних за Мізесом напружень, які виникають при дії навантаження на згин в елементах моделі біомеханічної системи «фіксатор-кістка» з пластиною медіальною Х-подібною блокуючою пластиною

Висновки. Розглянуті проблеми експериментальної оцінки деформацій систем фіксації (остеосинтезу) переломів кісток. Встановлено, що показники стабільності систем остеосинтезу, виміряні в процесі циклічних випробувань, більш чутливі до типу засобу фіксації і можуть бути використані для ранжирування цих систем за мірою механічної надійності.

Стержневі апарати зовнішньої фіксації можуть використовуватися переважно для тимчасового фіксування переломів кісток гомілки та стегна при транспортуванні постраждалих та до моменту загоєння м'яких тканин (2-3 тижні).

За більшістю механічних характеристик серед досліджених пластин для фіксації переломів великогомілкової кістки перевагу мають Х-подібна медіальна титанова пластина.

Системи фіксації переломів таранної кістки перехресним введенням зустрічно-компресуючого гвинта сумісно з maleолярним компресуючим гвинтом або паралельним введенням двох зустрічно-компресуючих гвинтів мають підвищену жорсткість і міцність порівняно з рештою досліджених систем.

За результатами випробувань п'яних кісток, перевагу мають стрижневі апарати зовнішньої фіксації та титанові мініпластини.

Список літератури:

1. *Алегре Д.Н. Клинический опыт лечения переломов / Д.Н. Алегре // Травма. – 2011. – Том 12, №3. – С. 22 – 23.*
2. *Аналіз стану травматолого-ортопедичної допомоги населенню України в 2004 – 2005 рр.: Довід. / Г.В. Гайко, М.О. Корж, А.В. Калашніков [та ін.] – К.: Воля. – 2007. – 132 с.*
3. *Андрейчин В.А. Системний аналіз оперативного методу лікування діафізарних переломів і фактори впливу на репаративну регенерацію / В.А. Андрейчин, П.І. Білінський // Травма. – 2014. – Том 15, №5. – С. 59 – 64.*
4. *Експериментальні дослідження засобів остеосинтезу. Кол. авторів / За ред. Шидловського М.С, Лакши А.М. – К.: Ленвіт, 2017. – 277 с.*
5. *Шидловський Н.С. Методы исследования деформационной надежности систем остеосинтеза конечностей человека // Біомедична інженерія, – К: 2011, – № 1. – С. 24-31.*
6. *Шидловський Н.С. Методы исследования систем остеосинтеза конечностей человека Часть 2. Критерии деформационной надежности // Біомедична інженерія, – К: 2011, – № 2. – С. 42-50.*
7. *Capicotto, P.N. Midshaft clavicle nonunions treated with intramedullary Steinman pin fixation and onlay bone graft / P.N. Capicotto, K.G. Heiple, J.H. Wilbur // J. Orthop. Trauma. 1994. - 8, 2. - P. 88-93.*
8. *S. Suso, X. Alemany, A. Combalna, R. Ramyn. Compression of the anterior interosseous nerve after use of a Robert-Jones type bandage for a distal end clavicle fracture: case report // J. Trauma. 1994. - 36, 5. - P. 737-739.*